CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E1300

(1) Sea

$$f(x) = \frac{6x^3 + 3x^2 - 3x}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$$

hallar

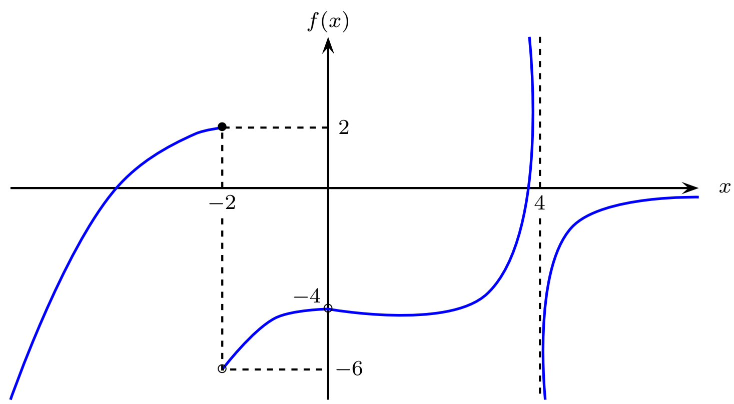
(a) Dominio y raíces

(b) Intervalos de continuidad, clasificando las discontinuidades

(c) Ecuaciones de asíntotas horizontales y verticales

(d) Esbozo gráfico

(2) Si la representación gráfica de $f(x)$ es



(a) Hallar su dominio

(b) Encontrar además los siguientes límites

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

para $a = -2$, 0 y 4

Las asíntotas horizontales y verticales, los intervalos de continuidad y la clasificación de las discontinuidades

(3) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto -4. Se define $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(2x-10) + \dfrac{x^2-2}{x+3}$.

¿Es $g(x)$ continua en el punto $a = 3$? Diga por qué.

(4) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 8 - |\,2x - 3\,| & \text{si } x \in (-\infty, -1] \\ ax^2 + b & \text{si } x \in (-1, 2) \\ \dfrac{14}{x^2 + x + 1} & \text{si } x \in [2, \infty)\,, \end{cases}$$

calcule los valores de las constantes a, b para que esa función sea continua en $\mathbb{R}$.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Sea

$$f(x)=\frac{6x^3+3x^2-3x}{2x^3+3x^2-2x}\,,$$

hallar:

(a) Dominio y raíces

▼

Dominio: $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,2x^3+3x^2-2x\neq 0\}$.
Calculemos los ceros del denominador

$$2x^3+3x^2-2x=x(2x^2+3x-2)=0\,;$$

$$2x^2+3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ -2\,;\end{cases}$$

luego entonces,

$$2x^3+3x^2-2x=x(2x^2+3x-2)=2x(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{-2,0,\frac{1}{2}\right\},$$

entonces,

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{-2,0,\frac{1}{2}\right\}\,.$$

Ahora para hallar las raíces, observemos análogamente que

$$6x^3+3x^2-3x=3x(2x^2+x-1)\text{ y que}$$

$$2x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ -1\,;\end{cases}$$

por lo tanto,
$6x^3+3x^2-3x=3x(2x^2+x-1)=6x(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow x=-1,\ 0$ o bien $\frac{1}{2}$.
Pero, como tanto 0 como $\frac{1}{2}$ no pertenecen al dominio de f, su única raíz es $x=-1$.

□

(b) Intervalos de continuidad, clasificando las discontinuidades

▼

Intervalos de continuidad: $(-\infty,-2)$,$(-2,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ & $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.
Para clasificar las discontinuidades calculemos

$$\lim_{x\to-2^{\mp}}f(x)=\lim_{x\to-2^{\mp}}\frac{6x^3+3x^2-3x}{2x^3+3x^2-2x}=\lim_{x\to-2^{\mp}}\frac{6x(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2x(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2^{\mp}}\frac{3(x+1)}{x+2}=\pm\infty\,,$$

por lo tanto la discontinuidad en $x = -2$ es infinita y la recta $x = -2$ es una asíntota vertical;

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{3(x+1)}{x+2} = \frac{3 \times 1}{0+2} = \frac{3}{2}\,,$$

con lo que la discontinuidad en $x = 0$ es removible;

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{3(x+1)}{x+2} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}+2} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{5}\,,$$

con lo cual la discontinuidad en $x = \frac{1}{2}$ también es removible.

□

(c) Ecuaciones de asíntotas horizontales y verticales

▼ Ya vimos que la única asíntota vertical es la recta $x = -2$.
Para hallar las asíntotas horizontales calculemos

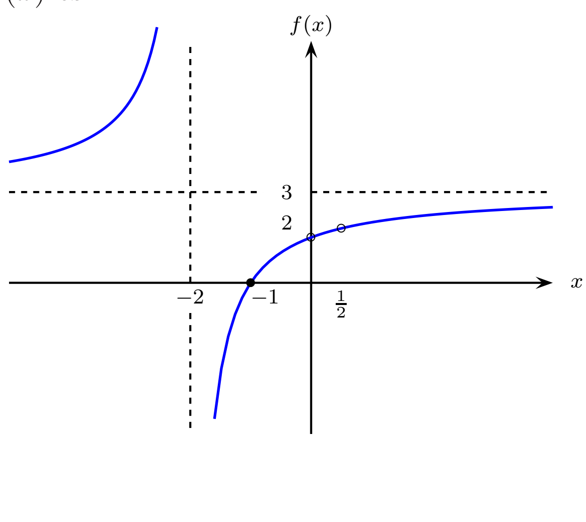
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^3 + 3x^2 - 3x}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{6}{2} = 3\,.$$

Puesto que dividimos el numerador y el denominador de la función racional entre x^3, que es la mayor potencia que aparece, inferimos de aquí que $y = 3$ es la única asíntota horizontal.

□

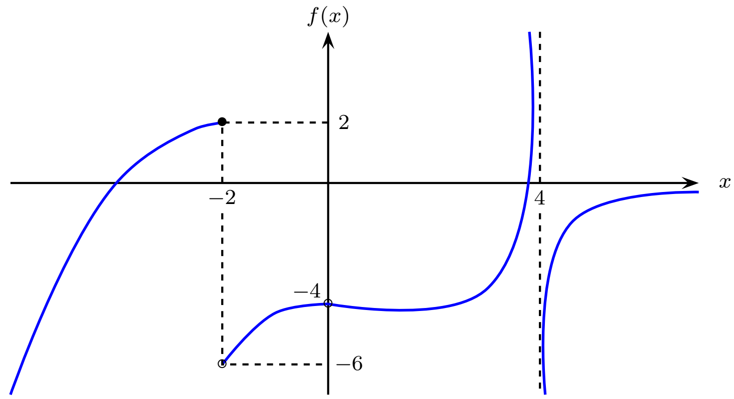
(d) Esbozo gráfico.

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(2) Si la representación gráfica de $f(x)$ es



(a) Hallar su dominio

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$. □

(b) Encontrar además los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; □

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; □

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 2$; □

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -6$; □

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ no existe pues los límites laterales son diferentes; □

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -4$; □

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -4$; □

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -4$, que es el límite lateral de f tanto por la izquierda como por la derecha; □

$\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = +\infty$; □

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = -\infty$; □

$\lim\limits_{x\to4} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to4} f(x)$ no existe; □

De aquí se sigue que la recta $y = 0$ (el eje de las x) es la única asíntota horizontal y que $x = 4$ es la única asíntota vertical.

La función $f(x)$ es continua en $(-\infty, -2]$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$ y en $(4, +\infty)$.

En $x = -2$ hay una discontinuidad (esencial) de salto, en $x = 0$ la discontinuidad es removible y en $x = 4$ la discontinuidad también es esencial pues es infinita.

(3) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto -4. Se define $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(2x-10) + \dfrac{x^2-2}{x+3}$. ¿Es $g(x)$ continua en el punto $a = 3$? Diga por qué.

▼ Como

$$g(3) = f(6-10) + \frac{3^2-2}{3+3} = f(-4) + \frac{7}{6} \text{ y además como}$$

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3}\left[f(2x-10) + \frac{x^2-2}{x+3}\right] = \lim_{x\to 3} f(2x-10) + \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x+3} =$$

$$= f(6-10) + \frac{3^2-2}{3+3} = f(-4) + \frac{7}{6} = g(3),$$

efectivamente, g es continua en 3.
En el cálculo del límite usamos que el límite de una suma es la suma de los límites, cuando ellos existen. Además como la función $2x-10$ es continua en toda la recta y como la función $f(x)$ es continua en -4, y como su dominio son todos los reales, entonces la función composición $f(2x-10)$ es continua en $x=3$.

□

(4) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 8 - |\,2x-3\,| & \text{si } x \in (-\infty, -1] \\ ax^2 + b & \text{si } x \in (-1, 2) \\ \dfrac{14}{x^2+x+1} & \text{si } x \in [2, \infty)\,, \end{cases}$$

calcule los valores de las constantes a, b para que esa función sea continua en $\mathbb{R}$.

▼ Tenemos que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(ax^2+b) = a+b\,;$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(8 - |\,2x-3\,|) = 8 - \left|\lim_{x\to -1^-}(2x-3)\right| =$$

$$= 8 - |\,-2-3\,| = 8 - |\,-5\,| = 8-5 = 3 = f(-1)\,;$$

para que f sea continua en $x=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$. Entonces, $a+b=3$.
Análogamente calculemos

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax^2+b) = 4a+b\,;$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{14}{x^2+x+1} = \frac{14}{4+2+1} = \frac{14}{7} = 2 = f(2)\,.$$

Entonces para que f sea continua en 2, es necesario y suficiente que $4a+b=2$, por lo que tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incognitas:

$$\begin{cases} a+b &= 3 \\ 4a+b &= 2\,. \end{cases}$$

Restándoles tenemos: $-3a = 1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{3}$ & $b = 3 - a = 3 - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 3 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3}$.
En $\mathbb{R} - \{-1, 2\} = (-\infty, -1)\bigcup(-1, 2)\bigcup(2, +\infty)$, la función f es obviamente continua pues $|\,2x-3\,|$ es la composición de dos funciones continuas, $2x-3$ y el valor absoluto; $8 - |\,2x-3\,|$ es la diferencia de dos funciones continuas; $ax^2+b = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{10}{3}$ es una función polinomial; $\dfrac{14}{x^2+x+1}$ también es continua en toda la recta pues es una racional sin raíces en el denominador ya que para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 \neq 0$ dado que su discriminante es

$$b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0\,.$$

Siendo entonces $8 - |\,2x - 3\,|$, $-\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{10}{3}$ & $\dfrac{14}{x^2 + x + 1}$ continuas en $\mathbb{R}$, también lo son en $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y en $(2, \infty)$, respectivamente, pues son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

$\square$