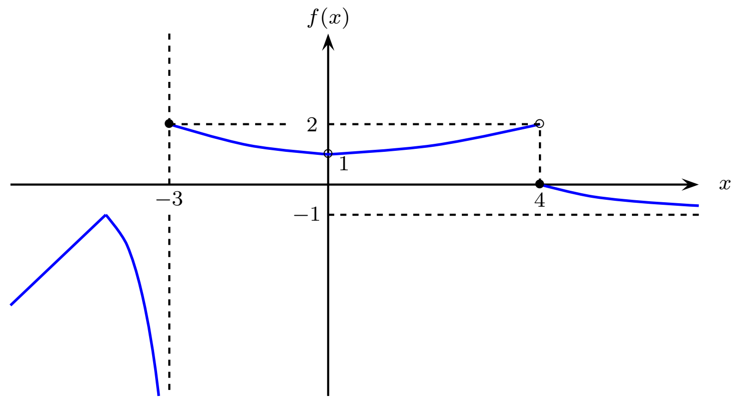
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E1400

(1) A partir de la gráfica de una función f:



Obtener:

(a) Los intervalos de continuidad de la función f

(b) Las ecuaciones de las asíntotas de f

(c) Los límites siguientes:

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

(2) Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2}$$

(a) Obtener dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función f

(b) Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función f

(c) Obtener gráfica e imagen de la función f

(3) Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 7 & \text{si } x < -2 \\ ax^2 - 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ b & \text{si } x = 2 \\ -x + 7 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

(a) Determinar los valores de las constantes a y b que hacen de f una función continua en $x = 2$

(b) Reescriba la función f con los valores calculados de a y b. Estudie la continuidad o discontinuidad de f en $x = -2$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(4) La función h tiene la siguiente tabla de valores:

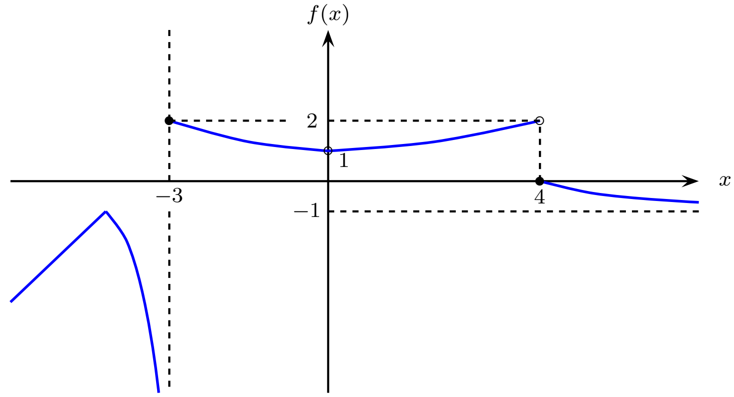
x	$h(x)$
-1.9	20.9701
-1.99	26.3638
-1.999	26.936
-2	27
-2.001	27.064
-2.01	27.6438
-2.1	33.7901

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $(-2, h(-2))$. Con base en estos resultados estime un intervalo de variación para la pendiente de la recta tangente a la gráfica de h en $(-2, h(-2))$.

(5) El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s(t) = t^2 - 6t + 10$, donde t (tiempo) se mide en segundos.
(a) Calcule la velocidad instantánea en el tiempo t
(b) Determine la velocidad instantánea cuando la posición de la partícula es 10 m

Respuestas

(1) A partir de la gráfica de una función f:



Obtener:

(a) Los intervalos de continuidad de la función f

▼ La función f es continua en: $(-\infty,-3)\bigcup[-3,0)\bigcup(0,4)\bigcup[4,\infty)$.

$\square$

(b) Las ecuaciones de las asíntotas de f

▼ La asíntota vertical es $x=-3$ y la horizontal es $y=-1$

$\square$

(c) Los límites siguientes:

$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=-\infty$; $\square$

$\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=2$; $\square$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$; $\square$

$\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=2$; $\square$

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=0$; $\square$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. $\square$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
▼ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$; $\square$

(2) Considere la función

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{9-x^2}\,.$$

(a) Obtener dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función f

▼

Por ser f una función racional, su dominio es:

$$D_f=\mathbb{R}-\{x\,|\,9-x^2=0\}=\mathbb{R}-\{x\,|\,x^2=9\}=\mathbb{R}-\{-3,3\}\,.$$

Raíces:

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow(x+1)(x-3)=0\Leftrightarrow x+1=0 \text{ o bien } x-3=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ o bien } x=3\,.$$

Pero $x=3\notin D_f$, por lo cual sólo hay una raíz, que es $x=-1$.

Intervalos de continuidad:

Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio

$$D_f=(-\infty,-3)\bigcup(-3,3)\bigcup(3,+\infty)\,.$$

□

(b) Obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x)$

▼ La función f tiene dos discontinuidades: en $x = -3$ y en $x = 3$.

Entonces, si $x - 3 \neq 0$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(3-x)(3+x)} =$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{-(3+x)} = \frac{3+1}{-(3+3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}\,.$$

Entonces, la función $f(x)$ tiene en $x = 3$ una discontinuidad removible.

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+1}{-(3+x)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{-(x+1)}{3+x} = \infty$. Ya que $(3+x) \to 0$ y que $-(x+1) \to 2$ cuando $x \to 3$.

Aún más,

- Cuando $x < -3$ & x próximo a -3:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{-x-1}{3+x} = -\infty.$$ Ya que $-x - 1 > 0$ y que $3 + x < 0$.

- Cuando $x > -3$ & x próximo a -3:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{-x-1}{3+x} = +\infty.$$ Ya que $-x - 1 > 0$ y que $3 + x > 0$.

Entonces la recta $x = -3$ es una asíntota vertical.

Ahora bien,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-x-1}{x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{-1}{1} = -1\,.$$

Así también,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1\,.$$

Entonces, la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal.

□

(c) Obtener gráfica e imagen de la función $f(x)$

▼ Un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ es:

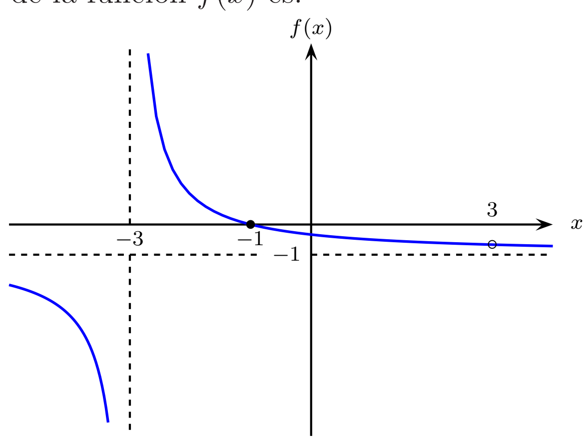


Imagen: $R_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

□

(3) Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 7 & \text{si } x < -2 \\ ax^2 - 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ b & \text{si } x = 2 \\ -x + 7 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

(a) Determinar los valores de las constantes a, b que hacen de ella una función continua en el punto $x = 2$

▼ Primero aseguramos la existencia de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(ax^2 - 3) = a(2)^2 - 3 = 4a - 3\,;$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x + 7) = -2 + 7 = 5\,.$$

Entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe si el

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4a - 3 = 5 \Leftrightarrow 4a = 8\,.$$

De donde $a = 2$.
Con el valor de $a = 2$ se asegura el $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.
Ahora bien, como $f(2) = b$ y se quiere la continuidad de f en $x = 2$, deberá cumplirse que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)\,.$$

Esto es, que $b = 5$.

□

(b) Reescriba la función $f(x)$ con los valores calculados de a, b. Estudie la continuidad o discontinuidad de dicha función en el punto $x = -2$

▼ La función resultó ser

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 7 & \text{si } x < -2 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ -x + 7 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

Veamos ahora si f es continua o no en $x = -2$.

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5 \Rightarrow f(-2) \text{ existe y } f(-2) = 5\,;$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-}(x^3 + 7) = (-2)^3 + 7 = -8 + 7 = -1\,;$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}(2x^2 - 3) = 2(-2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5\,;$$

Ya que $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -1$ y que $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 5$, entonces
$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, lo cual implica que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe.
Con esto basta para asegurar que la función $f(x)$ no es continua en $x = -2$.
Aún más, en $x = -2$ la función tiene una discontinuidad esencial (de salto).

□

(4) La función h tiene la siguiente tabla de valores:

x	$h(x)$
-1.9	20.9701
-1.99	26.3638
-1.999	26.936
-2	27
-2.001	27.064
-2.01	27.6438
-2.1	33.7901

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $(-2, h(-2))$. Con base en estos resultados estime un intervalo de variación para la pendiente de la recta tangente a la gráfica de h en $(-2, h(-2))$.

▼ Consideramos una recta secante S_1 que pase por los puntos $(-2, h(-2))$ y $(x_1, h(x_1))$, y otra secante S_2 que pase por los puntos $(-2, h(-2))$ y $(x_2, h(x_2))$.
Conviene considerar que $x_1 < -2$ y que $x_2 > -2$. Por ejemplo, sean $x_1 = -2.01$ y $x_2 = -1.99$.
La pendiente m_1 de la recta secante S_1 es

$$m_1 = \frac{h(x_1) - h(-2)}{x_1 - (-2)} = \frac{27.6438 - 27}{-2.01 + 2} = \frac{0.6438}{-0.01} = -64.38\,.$$

La pendiente m_2 de la recta secante S_2 es

$$m_2 = \frac{h(x_2) - h(-2)}{x_2 - (-2)} = \frac{26.3638 - 27}{-1.99 + 2} = \frac{-0.6362}{0.01} = -63.62\,.$$

Las pendientes $m_1 = -64.38$ y $m_2 = -63.62$ nos definen el intervalo de variación de la pendiente m_T de la recta tangente a la gráfica de h en el punto $(-2, h(-2))$. A saber,

$$-64.38 \le m_T \le -63.62\,.$$

□

(5) El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s(t) = t^2 - 6t + 10$, donde t (tiempo) se mide en segundos.

(a) Calcule la velocidad instantánea en el tiempo t

▼ La velocidad instantánea es

$$\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}\,;\\
s(t) &= t^2 - 6t + 10\,;\\
s(t+h) &= (t+h)^2 - 6(t+h) + 10 = t^2 + 2th + h^2 - 6t - 6h + 10\,;\\
s(t+h) - s(t) &= (t^2 + 2th + h^2 - 6t - 6h + 10) - (t^2 - 6t + 10)\,;\\
s(t+h) - s(t) &= 2th + h^2 - 6h = h(2t + h - 6)\,;\\
v(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} =\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2t + h - 6)}{h} =\\
&= \lim_{h\to 0} (2t + h - 6)\,;\\
v(t) &= 2t - 6 \text{ m/s}\,,
\end{aligned}$$

que es la velocidad instantánea en cualquier instante $t \geq 0$.

□

(b) Determine la velocidad instantánea cuando la posición de la partícula es 10 metros

▼ Primero determinamos el instante en que $s(t) = 10$ m.

$$s(t) = 10 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 10 = 10 \Leftrightarrow t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow t(t-6) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ o bien } t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ o bien } t = 6\,.$$

Luego, calculamos las velocidades en estos instantes

$$V(t=0) = 2(0) - 6 = -6 \Rightarrow V(0) = -6 \text{ m/s}\,;$$
$$V(t=6) = 2(6) - 6 = 6 \Rightarrow V(6) = 6 \text{ m/s}\,.$$

□