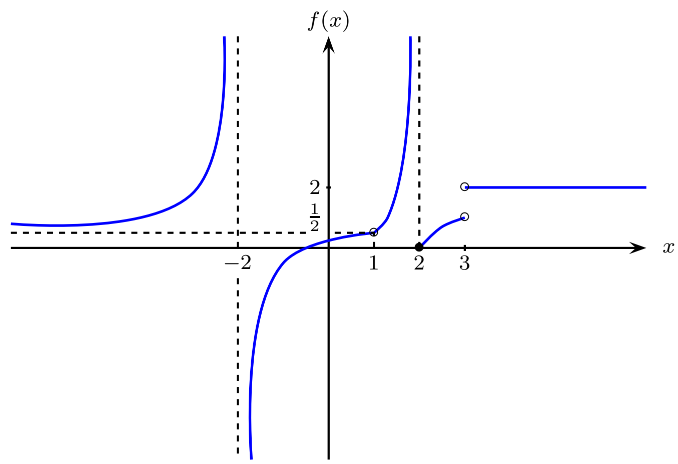
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E1500

(1) La función f tiene la gráfica siguiente:



(a) De la gráfica determine:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$;
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$;
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$;

(b) Calcule $f(-2)$, $f(1)$ y $f(2)$

(c) ¿Existen o no los siguientes límites? $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

(2) Se lanza una pelota hacia arriba. La ecuación de posición de la pelota al tiempo t es

$$s(t) = 5t - 10t^2 .$$

(a) Calcule la velocidad instantánea (v) en el tiempo $t = 1/4$ calculando el límite
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(1/4 + h) - s(1/4)}{h}$

(b) Calcule la posición de la pelota en el tiempo $t = 1/4$

(c) Dé una interpretación de sus resultados

(3) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x} - 2}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{4\,|\,x\,|} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y determine sus puntos de continuidad

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(4) Considere la función

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}\,.$$

Determinar:

(a) El dominio, las raíces y paridad de f

(b) Las asíntotas verticales y horizontales de f

(c) Dé un bosquejo de la gráfica de la función

(5) Sea $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ la función definida por

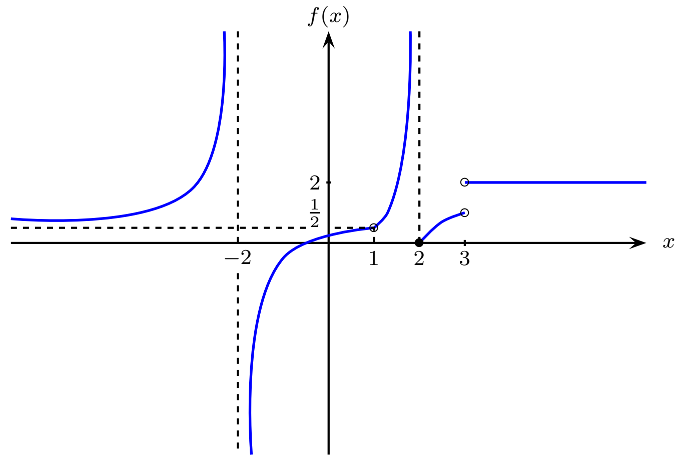
$$f(x) = 48 - 98x - 343x^2 + 287x^3 - 343x^4 + 287x^5 - 391x^6 + 385x^7\,.$$

Evalúe $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

¿ Cuántas raíces reales tiene al menos el polinomio $f(x)$ en el intervalo $[-3, 3]$?

Respuestas

(1) La función f tiene la gráfica siguiente:



(a) De la gráfica determine los límites:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \infty$; □

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$; □

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$; □

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$; □

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$; □

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$; □

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$; □

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$; □

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$. □

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2$; □

(b) Calcule $f(-2)$, $f(1)$ así como $f(2)$.

▼

$$f(-2) \text{ no existe; } f(1) \text{ no existe y además } f(2) = 0\,.$$

□

(c) ¿Existen o no los siguientes límites: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

▼ Tenemos que

$$\lim_{x\to -2} f(x) \text{ no existe; } \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}; \lim_{x\to 2} f(x) \text{ no existe; } \lim_{x\to 3} f(x) \text{ no existe.}$$ □

(2) Se lanza una pelota hacia arriba. La ecuación de posición de la pelota al tiempo t es

$$s(t) = 5t - 10t^2\,.$$

(a) Calcule la velocidad instantánea (v) en el tiempo $t = 1/4$ calculando el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(1/4 + h) - s(1/4)}{h}$$

▼ Tenemos que

$$s(t) = 5t - 10t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s\left(\frac{1}{4}\right) = 5\left(\frac{1}{4}\right) - 10\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{4} - 10\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{4} - \frac{5}{8} = \frac{5}{8}\,;$$
$$s\left(\frac{1}{4} + h\right) = 5\left(\frac{1}{4} + h\right) - 10\left(\frac{1}{4} + h\right)^2 = \frac{5}{4} + 5h - 10\left(\frac{1}{16} + \frac{2}{4}h + h^2\right) =$$
$$= \frac{5}{4} + 5h - \frac{5}{8} - 5h - 10h^2 = \frac{5}{8} - 10h^2\,;$$
$$s\left(\frac{1}{4} + h\right) - s\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} - 10h^2 - \frac{5}{8} = -10h^2\,;$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{s(1/4 + h) - s(1/4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-10h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-10h) = 0\,.$$

La velocidad instantánea en $t = \dfrac{1}{4}$ es $v = 0$.

□

(b) Calcule la posición de la pelota en $t = 1/4$

▼ La posición en $t = \dfrac{1}{4}$ es $s\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{8}$.

□

(c) Dé una interpretación de sus resultados.

▼ Se infiere que la posición en $t = \dfrac{1}{4}$ es la altura máxima de la pelota, por lo que su velocidad instantánea en $t = \dfrac{1}{4}$ es $v = 0$.

□

(3) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x} - 2}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{4\,|\,x\,|} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y determine sus puntos de continuidad

▼ Para $x < 0$ se tiene que $|\,x\,| = -x$, por lo que

$$g(x) = \frac{x}{4\,|\,x\,|} = \frac{x}{4(-x)} = -\frac{1}{4}$$

que es una función constante.
Entonces g es una función continua para $x < 0$.
Para $x > 0$ se tiene que

$$g(x) = \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$$

que es una función continua para cada $x \neq 0$ tal que $4 + x \geq 0$; es decir, para $x \neq 0$ tal que $x \geq -4$.
Esto es, g es una función continua para $x > 0$.

Pero g es discontinua en $x = 0$. Basta ver que

$$g(0) = \frac{1}{4}$$

y que

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\,;$$

es decir,

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) \neq g(0)\,.$$

Ni falta hace calcular el $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.

$\square$

(4) Considere la función

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}\,.$$

Determinar:

(a) El dominio, las raíces y paridad de $h(x)$

▼

Por ser una función racional, su dominio es:

$$D_h = \mathbb{R} - \{x \mid x^2 - 4 = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid x^2 = 4\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}\,.$$

Raíces: $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Paridad:

$$h(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x^2) - 4} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = h(x)\,.$$

Se trata de una función par, por lo que cual su gráfica es simétrica con respecto al eje de las ordenadas.

$\square$

(b) Las asíntotas verticales y horizontales de $h(x)$

▼ Las rectas $x = -2$ & $x = 2$ podrían ser asíntotas verticales. Por la paridad de la función, basta con analizar sólo una, por ejemplo $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = -\infty\,,$$

ya que $(x^2 - 4) \to 0$ con valores negativos y ya que $(x^2 - 1) \to 3$ que es positivo cuando $x \to 2^-$.

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = +\infty\,,$$

ya que $(x^2 - 4) \to 0$ con valores positivos y ya que $(x^2 - 1) \to 3$ que es positivo cuando $x \to 2^+$.

Luego entonces, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Por la paridad de esta función resulta que la recta $x = -2$ es también una asíntota vertical, cumpliéndose que

$$\lim_{x \to -2^-} h(x) = +\infty = \lim_{x \to 2^+} h(x)$$

y que

$$\lim_{x \to -2^+} h(x) = -\infty = \lim_{x \to 2^-} h(x)\,.$$

Para las asíntotas horizontales, analizamos cuando $x \to +\infty$:

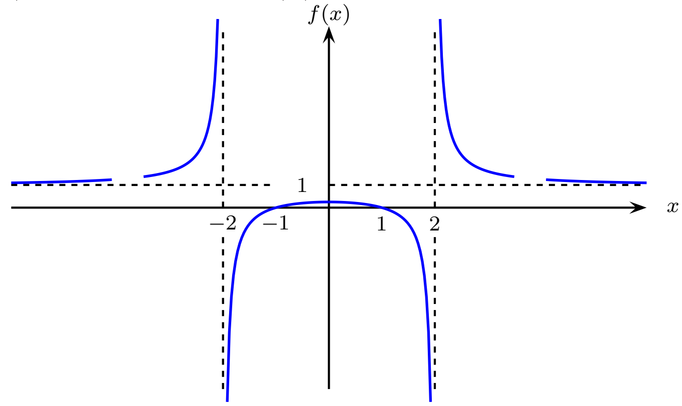
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Luego entonces, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. Y por la paridad de esta función se tiene que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$, por lo cual, la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal de h.

□

(c) Dé un bosquejo de la gráfica de la función

▼ Un bosquejo (raquítico) de la gráfica de $h(x)$ puede ser



□

(5) Sea $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = 48 - 98x - 343x^2 + 287x^3 - 343x^4 + 287x^5 - 391x^6 + 385x^7\,.$$

Evalúe $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

¿ Cuántas raíces reales tiene al menos el polinomio $f(x)$ en el intervalo $[-3, 3]$?

▼ Evaluando tenemos que

$$f(-2) = -92400; \quad f(-1) = -1890; \quad f(0) = 48;$$
$$f(1) = -168; \quad \text{y que} \quad f(2) = 28728.$$

Ya que f es una función continua en todo $\mathbb{R}$, por ser polinomial, entonces f es continua en el intervalo $[-3, 3]$.

Por ser $f(-2) < 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, por el teorema del Valor Intermedio, la función f tiene al menos una raíz en los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y en $(1, 2)$.

Luego entonces, la función f tiene al menos 3 raíces reales en el intervalo $[-3, 3]$.

□