CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E1600

(1) Dar una posible gráfica para una función f que sea continua en su dominio $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ y que satisfaga las condiciones:

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty; & \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 1;\\
\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3; & \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \infty; & \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty;\\
\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to2} f(x) = 3; & f(1) = 0.
\end{array}$$

Clasifique sus discontinuidades.

(2) Considere la función

$$h(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 25}\,.$$

(a) Obtener el dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función h
(b) Obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de h
(c) Bosquejar la gráfica de la función h

(3) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} & \text{si } x \le -8 \\[4pt] \dfrac{(x+3)\,|\,x+2\,|}{x+2} & \text{si } -8 < x < -2 \\[4pt] \sqrt{9 - x^2} & \text{si } x \ge -2\,. \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
(b) ¿Existe el $\lim\limits_{x\to-2} g(x)$? Justifique su respuesta

(4) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(-10) = -4$, $f(-3) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 8$, $f(4) = -5$. Determine el número de raíces que al menos tiene la función f y en qué intervalos se encuentran.

(5) La gráfica de la función $f(t) = -t^2 + 2t + 3$ pasa por los puntos $(1.999, f(1.999))$ y $(2.001, f(2.001))$.
(a) Obtenga el valor de las pendientes de dos rectas secantes a la gráfica de f que pasen por el punto $(2, 3)$ y por los puntos mencionados
(b) ¿Qué puede decir acerca de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 3)$?

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

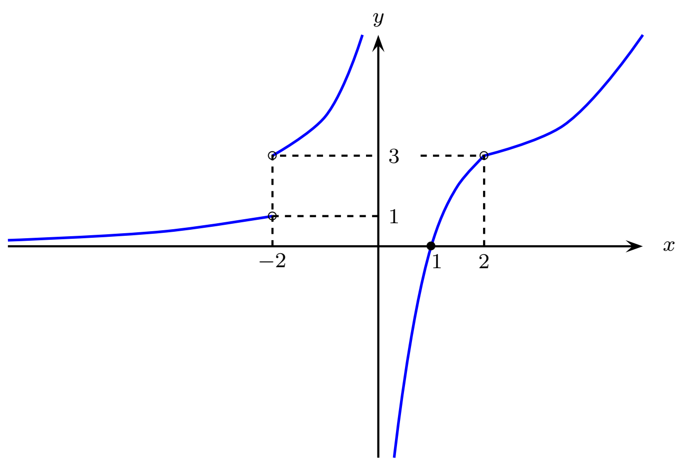
Respuestas

(1) Dar una posible gráfica para una función f que sea continua en su dominio $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ y que satisfaga las condiciones:

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty; & \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 1; \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3; & \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty; & \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty; \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3; & f(1) = 0. \end{array}$$

Clasifique sus discontinuidades.

▼ Una posible gráfica de la función f es la siguiente



Discontinuidades:
En $x = -2$ se tiene una discontinuidad esencial de salto.
En $x = 0$ se tiene una discontinuidad esencial infinita.
En $x = 2$ se tiene una discontinuidad evitable o removible. □

(2) Considere la función

$$h(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 25}.$$

(a) Obtener el dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función h

▼
Por ser h una función racional, su dominio es

$$D_h = \mathbb{R} - \{x \mid x^2 - 25 = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid x^2 = 25\} = \mathbb{R} - \{-5, 5\}.$$

Raíces: $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.
Por ser h una función racional, es continua en todo su dominio; es decir, en

$$(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty).$$

□

(b) Obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de h

▼ La función es discontinua en $x = -5$ y en $x = 5$.

$$\lim_{x\to-5^-} h(x) = \lim_{x\to-5^-} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 25} = +\infty,$$

ya que $(x^2 - 25) \to 0$ con valores positivos y ya que $(2x^2 - 18) \to 32$ que es positivo cuando $x \to -5^-$.

Análogamente:

$$\lim_{x\to -5^+} h(x) = \lim_{x\to -5^+} \frac{2x^2-18}{x^2-25} = -\infty\,,$$

ya que $(x^2-25) \to 0$ con valores negativos y ya que $(2x^2-18) \to 32$ que es positivo cuando $x \to -5^+$.
De lo anterior podemos afirmar que la recta $x = -5$ es una asíntota vertical.
De manera semejante se obtiene que la recta $x = 5$ es una asíntota vertical y además que

$$\lim_{x\to 5^-} h(x) = -\infty \ \&\ \lim_{x\to 5^+} h(x) = +\infty\,.$$

También se pueden obtener estos resultados considerando que la función es par.

En cuanto a las asíntotas horizontales vemos que

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-18}{x^2-25} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2-\dfrac{18}{x^2}}{1-\dfrac{25}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

y que

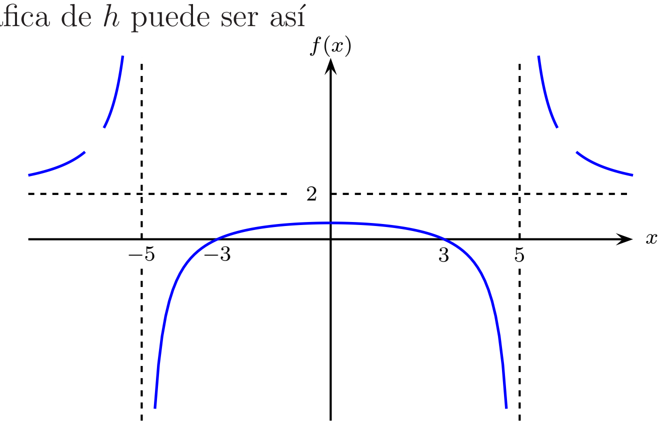
$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-18}{x^2-25} = 2\,,$$

lo cual nos permite afirmar que la recta $y = 2$ es la única asíntota horizontal de la función.

□

(c) Bosquejar la gráfica de la función h

▼ Un bosquejo de la gráfica de h puede ser así



□

(3) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x} & \text{si } x \le -8 \\[4pt] \dfrac{(x+3)\,|\,x+2\,|}{x+2} & \text{si } -8 < x < -2 \\[4pt] \sqrt{9-x^2} & \text{si } x \ge -2\,. \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$

▼ Tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x}) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x}}{1} \; \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-3x}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-1)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-3x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{3x-1}{|\,x\,|}}{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|\,x\,|} + \dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{|\,x\,|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{3x}{-x} - \dfrac{1}{-x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}} + \dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}} + \sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} =$$

$$= \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}\,.$$

Luego entonces,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\frac{3}{2}\,.$$

□

(b) ¿Existe el $\lim\limits_{x\to-2} g(x)$? Justifique su respuesta

▼ Veamos los límites laterales $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x)$ & $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x)$.

Cuando $x \to -2^-$, se tiene que

$$x < -2 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow |\,x+2\,| = -(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|\,x+2\,|}{x+2} = \frac{-(x+2)}{x+2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-2^-} g(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{(x+3)\,|\,x+2\,|}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to-2} [-(x+3)] = -(-2+3) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to-2^-} g(x) = -1\,.$$

Cuando $x \to -2^+$, se tiene que

$$x > -2 \Rightarrow g(x) = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-2^+} g(x) = \lim_{x\to-2} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(-2)^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-2^+} g(x) = \sqrt{5}\,,$$

luego entonces,

$$\lim_{x\to-2^-} g(x) \neq \lim_{x\to-2^+} g(x)\,,$$

por lo cual podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to-2} g(x)$ no existe. □

(4) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(-10) = -4$, $f(-3) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 8$, $f(4) = -5$. Determine el número de raíces que al menos tiene la función f y en qué intervalos se encuentran.

▼ Ya que $f(-10) = -4$ y que $f(-3) = 2$, entonces $f(-10) < 0$ & $f(-3) > 0$; por lo tanto, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos una raíz en el intervalo $(-10, -3)$.
Análogamente, $f(2) = 8$ & $f(4) = -5$ implican que $f(2) > 0$ y que $f(4) < 0$; de nuevo, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos una raíz en el intervalo $(2, 4)$.
Luego entonces, la función f tiene al menos tres raíces en el intervalo $(-10, 4)$ pues $x = 1$ también es raíz.

□

(5) La gráfica de la función $f(t) = -t^2 + 2t + 3$ pasa por los puntos $(1.999, f(1.999))$ y $(2.001, f(2.001))$.

(a) Obtenga el valor de las pendientes de dos rectas secantes a la gráfica de f que pasen por el punto $(2, 3)$ y por los puntos mencionados

▼ Ya que $f = -t^2 + 2t + 3$, entonces

$$f(1.999) = -(1.999)^2 + 2(1.999) + 3 = 3.001999; \text{ así como}$$

$$f(2.001) = -(2.001)^2 + 2(2.001) + 3 = 2.997999\,.$$

Si S_1 es la recta secante que pasa por los puntos $A(1.999, 3.001999)$ y $P(2, 3)$, entonces la pendiente de S_1 es

$$m_1 = \frac{3 - 3.001999}{2 - 1.999} = \frac{-0.001999}{0.001} = -1.999\,.$$

Si S_2 es la recta secante que pasa por los puntos $P(2, 3)$ y $B(2.001, 2.997999)$, entonces la pendiente de S_2 es

$$m_2 = \frac{2.997999 - 3}{2.001 - 2} = \frac{-0.002001}{0.001} = -2.001\,.$$

□

(b) ¿Qué puede decir acerca de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 3)$?

▼ La pendiente de la recta tangente es un número m tal que: $-2.001 \le m \le -1.999$.

□