CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E1700

(1) Determinar los valores de A, B para los cuales la siguiente función es continua en $x = -1$ y en $x = 1$. Bosquejar la gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x < -1 \\ Ax + B & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

(2) De la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 7x + 10}$, encontrar:

(a) El dominio, raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación
(b) Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales
(c) Esbozar la gráfica utilizando la información obtenida en los incisos ($2a$) y ($2b$).

(3) De la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5x^2 + 3x + 1}}{\sqrt{2x^2 - 3}} & \text{si } x \le -4 \\ \dfrac{16 - x^2}{5 - \sqrt{x^2 + 9}} & \text{si } -4 < x < 1 \end{cases}$$

determinar los límites laterales en -4 y el límite en $-\infty$.

(4) En un movimiento rectilíneo la posición de un automóvil a las t horas es

$$s(t) = 50t - \frac{7}{t+1} \text{ km.}$$

(a) ¿Cuál es la velocidad promedio durante las dos primeras horas?
(b) ¿Cuál es la velocidad instantánea a las 2 horas? Obtenerla mediante la definición de derivada

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Determinar los valores de A, B para los cuales la siguiente función es continua en $x = -1$ y en $x = 1$. Bosquejar la gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x < -1 \\ Ax + B & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \,. \end{cases}$$

▼ Para que la función sea continua en -1 debe cumplir $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$.

En particular el límite debe existir y por lo tanto los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x^2 + x + 1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1\,;$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (Ax + B) = -A + B\,.$$

Igualando obtenemos

(*) $$-A + B = 1\,.$$

También, para que la función sea continua en 1 debe cumplir $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

En particular el límite debe existir y por lo tanto los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (Ax + B) = A + B\,;$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 4) = -2\,.$$

Igualando obtenemos

(**) $$A + B = -2\,.$$

Resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, formado por $(*)$ y por $(**)$, obtenemos

$$A = -\frac{3}{2} \;\;\&\; B = -\frac{1}{2}\,.$$

Al sustituir estos valores, obtenemos la función continua de la que se nos pide bosquejar su gráfica

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x < -1 \\ -\dfrac{3}{2}x + -\dfrac{1}{2} & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \,. \end{cases}$$

Esta función consta de tres partes:

i) La parábola $y = x^2 + x + 1$.
Vemos que

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,.$$

Es decir, es la parábola $y = x^2$ desplazada a la izquierda $\dfrac{1}{2}$ y levantada $\dfrac{3}{4}$.
Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(-2, 3)$.

ii) La recta $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Ésta es una recta de pendiente $-\dfrac{3}{2}$ y ordenada en el origen $-\dfrac{1}{2}$.

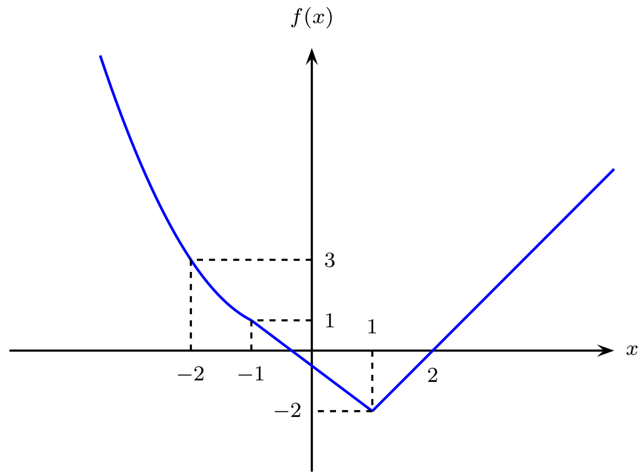
Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(1, -2)$. Une los extremos de los otros pedazos.

iii) La recta $y = 2x - 4$.

Esta es una recta de pendiente 2 y ordenada en el origen -4.

Pasa por los puntos $(1, -2)$ y $(2, 0)$.

Con esta información, un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ es



□

(2) De la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 7x + 10}$, encontrar:

(a) El dominio, raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación

▼

Dominio: vemos que

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x+6)(x-2)}{(x-5)(x-2)} = \frac{x+6}{x-5}, \quad \text{si } x \neq 2 \Leftrightarrow x - 2 \neq 0.$$

Así:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\, 5, 2 \,\} \; .$$

La raíz es: $x = -6$.

Discontinuidades:

En $x = 2$ se tiene una discontinuidad removible. Además $\displaystyle\lim_{x \to 2} f(x) = -\frac{8}{3}$.

En $x = 5$ se tiene una discontinuidad esencial infinita.

□

(b) Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales

▼ Puesto que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \dfrac{6}{x}}{1 - \dfrac{5}{x}} = 1 \, ,$$

tenemos que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Se tiene que $x = 5$ es una asíntota vertical. Vamos a examinar los límites laterales:

(i) Si $x \to 5^- \Rightarrow x < 5 \Rightarrow x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5) \to 0^-$, entonces

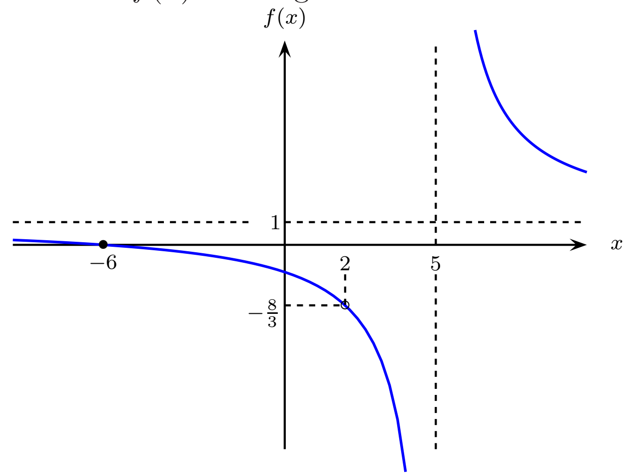
$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \frac{x+6}{x-5} = \text{``}\left(\frac{11}{0^-}\right)\text{''} = -\infty\,.$$

(ii) Si $x \to 5^+ \Rightarrow x > 5 \Rightarrow x - 5 > 0 \Rightarrow (x-5) \to 0^+$, entonces

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{x+6}{x-5} = \text{``}\left(\frac{11}{0^+}\right)\text{''} = +\infty\,.$$

□

(c) Esbozar la gráfica utilizando la información obtenida en los incisos $(2a)$ y $(2b)$.
Un esbozo de la gráfica de la función $f(x)$ es el siguiente



□

(3) De la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\sqrt{2x^2-3}} & \text{si } x \le -4 \\[2ex] \dfrac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}} & \text{si } -4 < x < 1\,, \end{cases}$$

determinar los límites laterales en -4 y el límite en $-\infty$.

▼ Primero, cuando $x \to -\infty$. La x cumple $x < -4 < 0$.
Tenemos

$$f(x) = \frac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\sqrt{2x^2-3}} = \frac{\sqrt{x^2(5+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}}{\sqrt{x^2(2-\frac{3}{x^2})}} = \frac{|\,x\,|\sqrt{5+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{|\,x\,|\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}}\,.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sqrt{5+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.581\,.$$

Segundo, cuando $x \to -4^-$. En este caso la función es continua y el límite lo calculamos por evaluación:

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \frac{\sqrt{5(-4)^2+3(-4)+1}}{\sqrt{2(-4)^2-3}} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{29}} \approx 1.5425\,.$$

Tercero, cuando $x \to -4^+$. La x cumple $-4 < x < 1$. Se tiene ahora:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}} = \frac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}}\,\frac{5+\sqrt{x^2+9}}{5+\sqrt{x^2+9}} = \frac{(16-x^2)(5+\sqrt{x^2+9})}{25-(x^2+9)} = \\ &= \frac{(16-x^2)(5+\sqrt{x^2+9})}{16-x^2} = 5+\sqrt{x^2+9} \text{ pues } x \neq \pm 4. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+}(5+\sqrt{x^2+9}) = 5+\sqrt{25} = 10, \quad \text{pues } x\neq \pm 4 \Leftrightarrow 16-x^2 \neq 0.$$

Vemos que la función es discontinua en $x = -4$, pues los límiteas laterales son distintos.

$\square$

(4) En un movimiento rectilíneo la posición de un automóvil a las t horas es

$$s(t) = 50t - \frac{7}{t+1} \text{ km.}$$

(a) ¿Cuál es la velocidad promedio durante las dos primeras horas?

▼ La velocidad promedio se calcula como

$$\begin{aligned} \frac{s(2)-s(0)}{2-0} &= \frac{(100-\frac{7}{3})-(-7)}{2} = \frac{100-\frac{7}{3}+7}{2} = \\ &= \frac{\frac{321-7}{3}}{2} = \frac{314}{6} = 52.\overline{3} \text{ km/h.} \end{aligned}$$

$\square$

(b) ¿Cuál es la velocidad instantánea a las 2 horas? Obtenerla mediante la definición de derivada

▼ Calculamos el cociente diferencial

$$\begin{aligned} \frac{s(t)-s(2)}{t-2} &= \frac{(50t-\frac{7}{t+1})-\frac{293}{3}}{t-2} = \frac{\frac{150t(t+1)-21-293(t+1)}{3(t+1)}}{t-2} = \\ (*) \qquad &= \frac{150t^2+150t-21-293t-293}{3(t+1)(t-2)} = \frac{150t^2-143t-314}{3(t+1)(t-2)}\,. \end{aligned}$$

Si tratamos de calcular el límite por evaluación cuando $t \to 2$, obtenemos una indeterminación "$\left(\frac{0}{0}\right)$". Esto significa que $t-2$ divide al polinomio $150t^2-143t-314$.

Hagamos la división:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 150t + 157 \\ \cline{2-2} t-2 & \quad 150t^2 - 143t - 314 \\ & \underline{-150t^2 + 300t} \\ & \qquad\quad + 157t \\ & \qquad\quad \underline{-157t + 314} \\ & \qquad\qquad\quad 0\,. \end{array}$$

Sustituyendo en $(*)$:

$$\frac{s(t)-s(2)}{t-2} = \frac{(150t+157)(t-2)}{3(t+1)(t-2)} = \frac{150t+157}{3(t+1)}, \text{ si } t \neq 2 \Leftrightarrow t-2 \neq 0.$$

Calculando el límite

$$\begin{aligned} v(2) = s'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{s(t)-s(2)}{t-2} = \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{150t+157}{3(t+1)} = \frac{300+157}{9} = \frac{457}{9} = 50.\overline{7} \text{ km/h}. \end{aligned}$$

□