CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E1800

(1) Determinar los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en los reales

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{4 - \sqrt{4x+4}}{x^2 - 2x - 3} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } x \neq 3 \\ b & \text{si } x = 3\,. \end{cases}$$

(2) De la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$$

encontrar:

(a) El dominio, las raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación
(b) Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales
(c) Esbozar la gráfica utilizando la información obtenida en los incisos (2a) y (2b).

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x-2}\,.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x + 5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}\,.$

(5) En un movimiento rectilíneo la posición de una partícula a los t segundos es $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$.

(a) Encontrar la velocidad promedio en el recorrido efectuado entre los 3 y 5 segundos
(b) Encontrar la velocidad instantánea a los 3 segundos. Obtenerla mediante la definición de derivada.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Determinar los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en los reales

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{si } x<0\\ \dfrac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3} & \text{si } x\geq 0 \text{ y } x\neq 3\\ b & \text{si } x=3\,.\end{cases}$$

▼ Para que la función sea continua en $x=0$ debe cumplir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. En particular el límite debe existir, por lo tanto se debe cumplir $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Calculamos ambos límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+a)=a\,;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3}\right)=\frac{4-\sqrt{4}}{-3}=-\frac{2}{3}=f(0)\,.$$

Igualando ambos límites:

$$a=-\frac{2}{3}\,.$$

Ahora en $x=3$ se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3}\right)=\frac{4-\sqrt{16}}{9-6-3}=\text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}\,.$$

Tenemos una indeterminación, entonces

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3}=\frac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3}\times\frac{4+\sqrt{4x+4}}{4+\sqrt{4x+4}}=\\ &=\frac{16-(4x+4)}{(x^2-2x-3)(4+\sqrt{4x+4})}=\frac{12-4x}{(x^2-2x-3)(4+\sqrt{4x+4})}=\\ &=\frac{-4(x-3)}{(x-3)(x+1)(4+\sqrt{4x+4})}=\frac{-4}{(x+1)(4+\sqrt{4x+4})},\quad \text{si } x\neq 3\Leftrightarrow x-3\neq 0.\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{-4}{(x+1)(4+\sqrt{4x+4})}\right)=\frac{-4}{4\times 8}=-\frac{1}{8}\,.$$

Igualando, tenemos $b=f(3)=-\dfrac{1}{8}$.

□

(2) De la función

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$$

encontrar:

(a) El dominio, las raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación

▼ Tenemos

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-3}{x+1}, \quad \text{si } x \neq -2 \Leftrightarrow x + 2 \neq 0.$$

Por lo tanto, podemos indicar ahora:
Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$.

Raíces: $x = 3$.

Discontinuidades: en $x = -2$ se tiene una discontinuidad removible.
Ya que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-3}{x+1} = \dfrac{-5}{-1} = 5$, en $x = -1$ se tiene una discontinuidad esencial infinita.

□

(b) Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales

▼ Como

$$f(x) = \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}},$$

entonces

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Se tiene que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Calculamos los límites laterales en $x = -1$.

(i) Si $x \to -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow (x+1) \to 0^-$. Así

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-3}{x+1} = \text{“}\left(\frac{-4}{0^-}\right)\text{”} = +\infty\,.$$

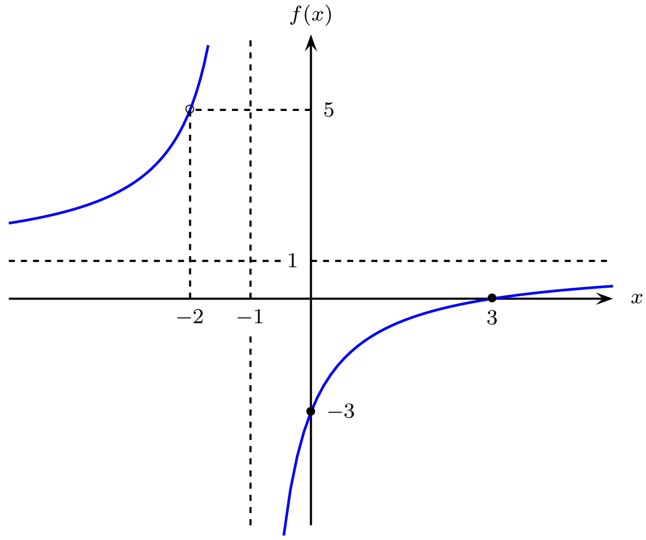
(ii) Si $x \to -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow (x+1) \to 0^+$. Así

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x-3}{x+1} = \text{“}\left(\frac{-4}{0^+}\right)\text{”} = -\infty\,.$$

□

(c) Esbozar la gráfica utilizando la información obtenida en los incisos ($2a$) y ($2b$).

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



$\square$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}$.

▼ Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2} &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2} \times \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}} = \\
&= \frac{(x+2)-(6-x)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})} = \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})} = \\
&= \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})} = \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}, \quad \text{si } x \neq 2 \Leftrightarrow x-2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}} = \frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

$\square$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$.

▼ Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{x+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} &= \frac{x+5\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x+5\,|\,x\,|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{|\,x\,|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \\
&= \frac{1+5\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}, \quad \text{si } x > 0.
\end{aligned}$$

Así

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+5\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1+5\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\,.$$

□

(5) En un movimiento rectilíneo la posición de una partícula a los t segundos es $s(t)=2t^2-3t+1$.

(a) Encontrar la velocidad promedio en el recorrido efectuado entre los 3 y 5 segundos

▼ Tenemos que

$$\frac{s(5)-s(3)}{5-3}=\frac{(2\times5^2-3\times5+1)-(2\times3^2-3\times3+1)}{2}=\frac{26}{2}=13\text{ unidades/segundo.}$$

□

(b) Encontrar la velocidad instantánea a los 3 segundos. Obtenerla mediante la definición de derivada

▼ Calculamos el cociente diferencial en $x=3$

(*)
$$\frac{s(t)-s(3)}{t-3}=\frac{2t^2-3t+1-10}{t-3}=\frac{2t^2-3t-9}{t-3}\,.$$

Si tratamos de calcular el límite por evaluación obtenemos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, lo cual nos dice que $t-3$ divide al polinomio del numerador.

Hagamos la división

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2t+3 \\ \hline t-3 & \;\;2t^2-3t-9 \\ & \underline{-2t^2+6t} \\ & \qquad\quad 3t \\ & \qquad \underline{-3t+9} \\ & \qquad\qquad\quad 0\,. \end{array}$$

Sustituyendo en $(*)$

$$\frac{s(t)-s(3)}{t-3}=\frac{(t-3)(2t+3)}{t-3}=2t+3,\quad\text{si } t\neq3\Leftrightarrow t-3\neq0.$$

Entonces,

$$v(3)=s'(3)=\lim_{x\to3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3}=\lim_{x\to3}(2t+3)=9\text{ unidades/segundo.}$$

□