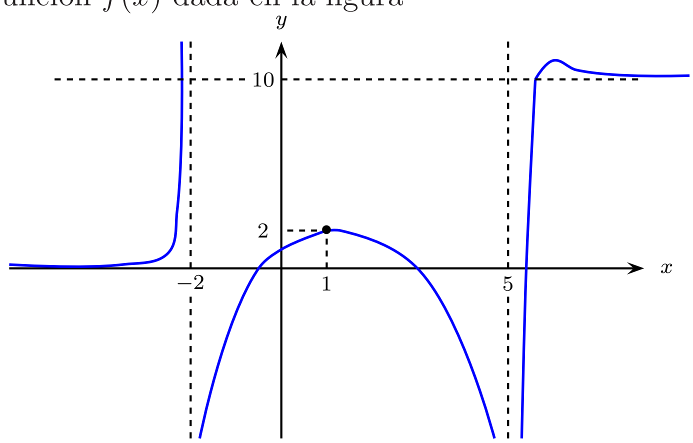
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E0200

(1) Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x-2}\,,$$

calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $[1, f(1)]$. Escribir además la ecuación de dicha recta tangente.

(2) Considere la gráfica de la función $f(x)$ dada en la figura



De la gráfica obtenga los siguientes valores:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)$; Clasifique las discontinuidades.

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

(3) El costo de fabricación de q automóviles eléctricos, en miles de pesos, es de

$$C(q) = 5q^3 + 13q^2 + 14\,,$$

mientras que el ingreso, también en miles de pesos, es de

$$I(q) = q^4 - 5q\,.$$

Demostrar que existe un valor entre 2 & 10, de la variable q, donde la fábrica sale a mano, es decir, ni gana ni pierde.

(4) Considere la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-4}{2-x} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2\,; \end{cases}$$

determine sus:

(a) Dominio y raíces
(b) Intervalos de continuidad y clasificación de discontinuidades
(c) Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

(d) Bosquejo gráfico

(5) Determinar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{Si } x \leq -2 \\ x^2 - 1 & \text{Si } -2 < x \leq 3 \\ x - b & \text{Si } x > 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los reales. Graficar la función determinada.

Respuestas

(1) Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x-2}\,,$$

calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $[1, f(1)]$. Escribir además la ecuación de dicha recta tangente.

▼ Calculamos primero la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P[1, f(1)]$ & $Q[x, f(x)]$, con $x \neq 1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{-1}}{x-1} = \frac{\dfrac{1}{x-2} + 1}{x-1} = \frac{\dfrac{1+x-2}{x-2}}{x-1} = \frac{x-1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2}\,.$$

Calculamos m_t que es la pendiente de la recta tangente en el punto $P[1, f(1)] = P(1, -1)$:

$$m_t = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-2} = -1\,.$$

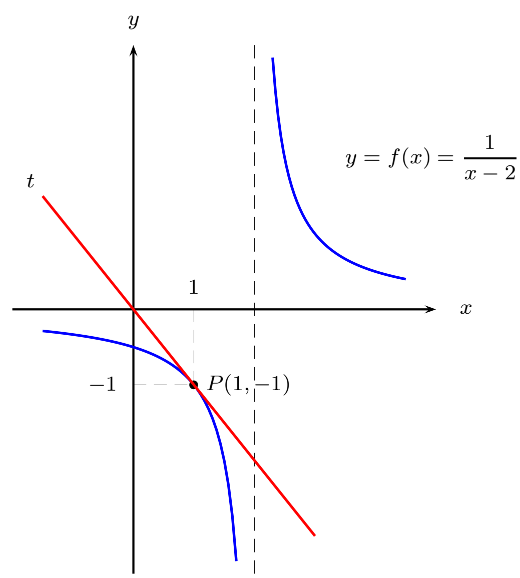
La ecuación de la recta tangente es

$$\frac{y-f(1)}{x-1} = m_t\,.$$

O sea,

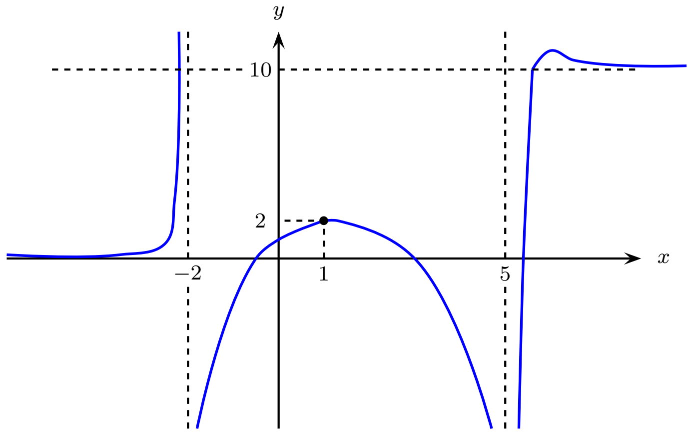
$$\frac{y-(-1)}{x-1} = -1 \Rightarrow y+1 = -(x-1) \Rightarrow y+1 = -x+1 \Rightarrow y = -x\,.$$

Lo cual nos da una recta con pendiente -1 y ordenada en el origen 0 (pasa por el origen)
Su gráfica es:



□

(2) Considere la gráfica de la función $f(x)$ dada en la figura



De la gráfica obtenga los siguientes valores:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\square$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$; $\square$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$; $\square$

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$; $\square$

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -\infty$; $\square$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\square$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$. $\square$

Clasifique las discontinuidades

▼ La función tiene dos discontinuidades esenciales (infinitas) en $x = -2$ y en $x = 5$. $\square$

(3) El costo de fabricación de q automóviles eléctricos, en miles de pesos, es de

$$C(q) = 5q^3 + 13q^2 + 14\,,$$

mientras que el ingreso, también en miles de pesos, es de

$$I(q) = q^4 - 5q\,.$$

Demostrar que existe un valor entre 2 & 10, de la variable q, donde la fábrica sale a mano, es decir, ni gana ni pierde.

▼ La ganancia de la fábrica cuando se fabrican q automóviles viene dada por

$$\begin{aligned} G(q) &= I(q) - C(q)(\text{ganancias mensuales de fabricación}) = \\ &= (q^4 - 5q) - (5q^3 + 13q^2 + 14) = \\ &= q^4 - 5q^3 - 13q^2 - 5q - 14\,. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} G(2) &= 2^4 - 5\times 2^3 - 13\times 2^2 - 5\times 2 - 14 = \\ &= 16 - 40 - 52 - 10 - 14 = \\ &= -100\,, \\ G(10) &= 10^4 - 5\times 10^3 - 13\times 10^2 - 5\times 10 - 14 = \\ &= 10\,000 - 5\,000 - 1\,300 - 50 - 14 = \\ &= 5\,000 - 1\,364 = 3\,636\,. \end{aligned}$$

Puesto que $G(q)$ es función continua, por el teorema del Valor Intermedio, la función toma todos los valores del intervalo $[-100, 3\,636]$ cuando q recorre el intervalo $[2, 10]$.

En particular

$$0 \in [-100, 3\,636]\,.$$

Entonces existe

$$q \in [2, 10] \text{ tal que } G(q) = 0\,.$$

Es decir,

$$I(q) - C(q) = 0\,;$$
$$I(q) = C(q)\,.$$

Si el ingreso es igual al costo de producción, la fábrica no gana ni pierde.

□

(4) Considere la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-4}{2-x} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2\,; \end{cases}$$

determine sus:

(a) Dominio y raíces

▼

Dominio de $g(x)$:

$$D_g = \mathbb{R}\,.$$

Puesto que

$$\frac{2x-4}{2-x} = \frac{-2(2-x)}{2-x} = -2 \text{ si } x \neq 2\,.$$

Raíces: vemos que $g(x)$ no tiene raíces.

□

(b) Intervalos de continuidad y clasificación de discontinuidades

▼ La función tiene una discontinuidad removible en $x = 2$, ya que

$$\lim_{x \to 2} g(x) = -2, \text{ pero } g(2) = 3\,.$$

Entonces la función es continua en $\mathbb{R} - \{\,2\,\}$.

□

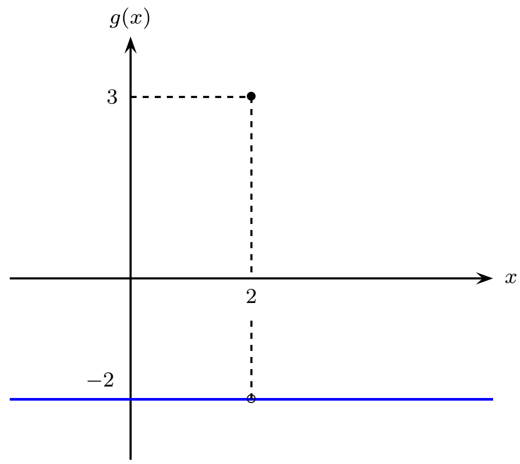
(c) Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales

▼ La función no tiene asíntotas verticales & $y = -2$ es asíntota horizontal.

□

(d) Bosquejo gráfico

▼ Su gráfica es:



□

(5) Determinar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{Si } x \leq -2 \\ x^2-1 & \text{Si } -2 < x \leq 3 \\ x-b & \text{Si } x > 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los reales. Graficar la función determinada.

▼ La función es continua en todos los reales excepto posiblemente en $x = -2$ y en $x = 3$. Para que en estos puntos exista continuidad se debe cumplir

$$\lim_{x \to -2} h(x) = h(-2) \ \& \ \lim_{x \to 3} h(x) = h(3).$$

Aseguremos primero la existencia de los límites.

(a) En $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} h(x) = \lim_{x \to -2^+} h(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to -2^-} (ax+1) = \lim_{x \to -2^+} (x^2-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2a+1 = 4-1 = 3.$$

Luego entonces, $\lim\limits_{x \to -2} h(x)$ existe si

$$-2a = 2 \Rightarrow a = -1\,.$$

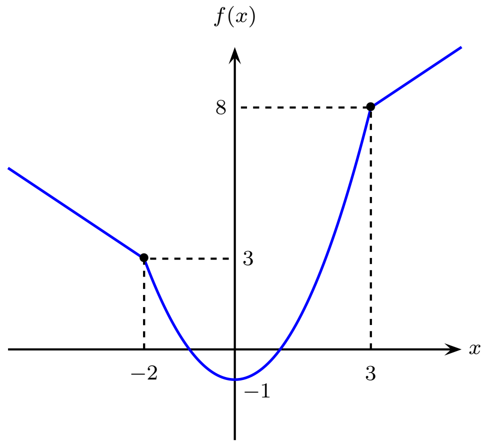
(b) En $x = 3$

$$\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^+} h(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} (x^2-1) = \lim_{x \to 3^+} (x-b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9-1 = 3-b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = -5\,.$$

Con estos valores la función que resulta es

$$h(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{Si } x \leq -2 \\ x^2-1 & \text{Si } -2 < x \leq 3 \\ x+5 & \text{Si } x > 3, \end{cases}$$

cuya gráfica es



La cual, por la forma en que fue construida cumple

$$\lim_{x\to -2} h(x) = 3 \;\&\; \lim_{x\to 3} h(x) = 8.$$

Además,

$$h(-2) = -(-2) + 1 = 3 \Rightarrow \lim_{x\to -2} h(x) = h(-2) \Rightarrow h \text{ es continua en } x = -2;$$

$$h(3) = 3^2 - 1 = 8 \Rightarrow \lim_{x\to 3} h(x) = h(3) \Rightarrow h \text{ es continua en } x = 3.$$

$\square$