CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E2200

(1) Se lanza una pelota hacia arriba desde la orilla de una azotea de un edificio de 18 m de alto. La altura de la pelota está dada por

$$h(t) = 18 + 9t - 2t^2$$

el momento t medido en segundos. ¿Durante qué intervalo de tiempo la pelota estará, cuando menos, 25 m arriba del suelo?

(2) Una caja rectangular sin tapa con volumen de 27 dm^3, tiene su base 3 veces más larga que ancha. Expрese el área superficial de la caja en función de su ancho.

(3) Si

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{si } -3 \le x < -2 \\ x^2 - 2x - 8 & \text{si } -1 \le x \le 5 \end{cases}$$

encontrar:

(a) Un esbozo gráfico de la función

(b) Dominio, rango, raíces, paridad y monotonía. Intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$

(c) Un esbozo gráfico para la función $g(x) = -\dfrac{1}{2}f(x+1) - 3$

(4) Si $f(x) = \sqrt{|\,3 - 4x\,| - 4}$, $g(x) = \sqrt{3 - 2x}$ & $h(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$.

encontrar:

(a) El dominio de $f(x)$

(b) Los dominios de $g(x)$ y de $h(x)$

(c) $(h \circ g)(x)$ y su dominio

canek.azc.uam.mx: 10/ 2/ 2007.

Respuestas

(1) Se lanza una pelota hacia arriba desde la orilla de una azotea de un edificio de 18 m de alto. La altura de la pelota está dada por

$$h(t) = 18 + 9t - 2t^2$$

el momento t medido en segundos. ¿Durante qué intervalo de tiempo la pelota estará, cuando menos, 25 m arriba del suelo?

▼ Resolver el problema es equivalente a resolver

$$h(t) \geq 25 \;\Rightarrow\; 18 + 9t - 2t^2 \geq 25 \;\Rightarrow\; -2t^2 + 9t - 7 \geq 0 \;\Rightarrow\; 2t^2 - 9t + 7 \leq 0\,.$$

Vamos a encontrar las raíces de la cuadrática $2t^2 - 9t + 7 = 0$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{9 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{7}{2} \\ 1\,. \end{cases}$$

Sabemos entonces que

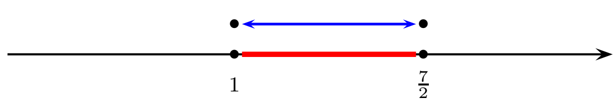
$$2t^2 - 9t + 7 = 2\left(t - \tfrac{7}{2}\right)(t - 1)\ .$$

Para saber dónde la cuadrática es negativa usamos la tabla

	Signo de		
Intervalo	$t-1$	$t-\frac{7}{2}$	$(t-\frac{7}{2})(t-1)$
$t < 1 (< \frac{7}{2})$	$-$	$-$	$+$
$1 < t < \frac{7}{2}$	$+$	$-$	$-$
$t > \frac{7}{2} (> 1)$	$+$	$+$	$+$

La solución es

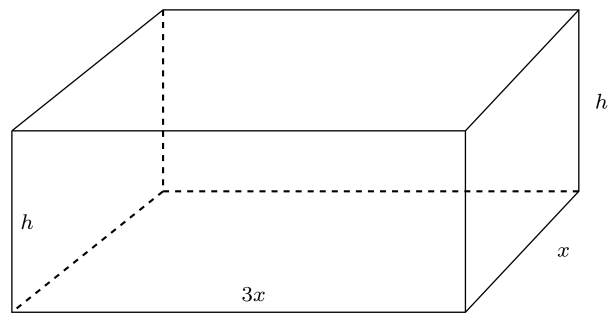
$$t \in \left[1, \tfrac{7}{2}\right]\ .$$



□

(2) Una caja rectangular sin tapa con volumen de 27 dm^3, tiene su base 3 veces más larga que ancha. Exprese el área superficial de la caja en función de su ancho.

▼ Usamos el siguiente dibujo.



El volumen de la caja es

(i) $$V = 3x^2h = 27.$$

El área lateral de la caja es

$$A_L = 2 \times xh + 2 \times 3xh = 8xh.$$

El área de la base de la caja es

$$A_B = 3x^2.$$

Y ahora ya el área total:

(ii) $$A_T = A_B + A_L = 3x^2 + 8xh.$$

Despejamos h de (i)

$$h = \frac{27}{3x^2} = \frac{9}{x^2}.$$

Sustituimos en (ii)

$$A_T = 3x^2 + 8x\frac{9}{x^2} = 3x^2 + \frac{72}{x}\,.$$

Ésta es la expresión solicitada.

□

(3) Si

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{si } -3 \le x < -2 \\ x^2 - 2x - 8 & \text{si } -1 \le x \le 5 \end{cases}$$

encontrar:

(a) Un esbozo gráfico de la función

▼ La gráfica de la función consta de dos partes:

(i) Una recta de pendiente $m = -3$ y ordenada en el origen $b = 1$ restringida al intervalo $[-3, -2)$.

Evaluamos esta recta en los extremos del intervalo para tener puntos de referencia:

x	$1 - 3x$
-3	10
-2	7

(ii) La parábola $y = x^2 - 2x - 8$ restringida al intervalo $[-1, 5]$.

Puesto que

$$x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 9,$$

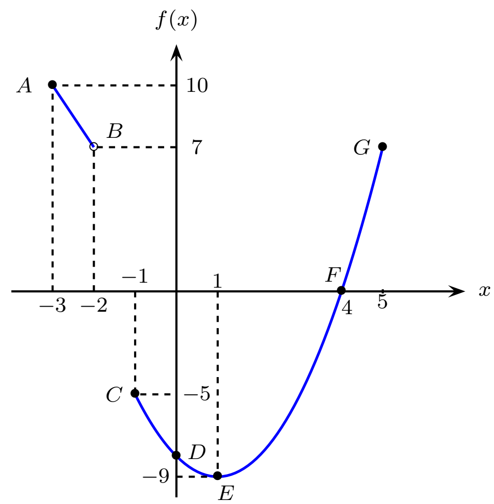
vemos que tenemos una parábola con vértice $(1, -9)$ y que se obtiene a partir de $y = x^2$ desplazándola 1 unidad a la derecha y 9 unidades hacia abajo.
Para obtener más información sobre la cuadrática calculamos los ceros o raíces:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \, . \end{cases}$$

Evaluamos la cuadrática en algunos puntos

x	$x^2 - 2x - 8$
0	-8
-1	-5
5	7

Con la información anterior hacemos un esbozo de la gráfica



□

(b) Dominio, rango, raíces, paridad y monotonía. Intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$
▼ Dominio: $D_f = [-3, -2) \bigcup [-1, 5]$.
Rango: $R_f = [-9, 10]$.
Raíces: $x = 4$.
Paridad: la función no es par ni impar.
La función decrece si $x \in [-3, 2)$ y en $[-1, 1]$.
La función crece si $x \in [1, 5]$.
$f(x) > 0$ si $x \in [-3, -2) \bigcup (4, 5]$.
$f(x) < 0$ si $x \in [-1, 4)$.

□

(c) Un esbozo gráfico para la función $g(x) = -\dfrac{1}{2} f(x + 1) - 3$
▼ Cada valor de la nueva gráfica se obtiene de la anterior desplazándola una unidad a la izquierda, multiplicando el valor de la función por $-\dfrac{1}{2}$ y bajándola 3 unidades.
Vamos a obtener los valores de los puntos elegidos:

$$D_g = [-4, -3) \bigcup [-2, 4] \, .$$

y los puntos $x = -3, -2, -1, 0, 1, 4$ y 5 se transforman respectivamente en

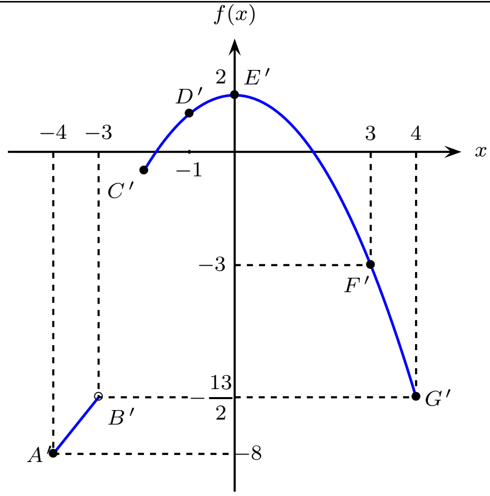
$x = -4, -3, -2, -1, 0, 3$ y 4 y:

$$
\begin{aligned}
g(-4) &= -\frac{1}{2}f(-4+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(-3) - 3 = -\frac{1}{2}10 - 3 = -5 - 3 = -8;\\
g(-3^-) &= -\frac{1}{2}f(-3^- + 1) - 3 = -\frac{1}{2}f(-2^-) - 3 = -\frac{1}{2}7 - 3 = -\frac{13}{2}\,;\\
g(-2) &= -\frac{1}{2}f(-2+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(-1) - 3 = -\frac{1}{2}(-5) - 3 = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}\,;\\
g(-1) &= -\frac{1}{2}f(-1+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(0) - 3 = -\frac{1}{2}(-8) - 3 = 4 - 3 = 1\,;\\
g(0) &= -\frac{1}{2}f(0+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(1) - 3 = -\frac{1}{2}(-9) - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}\,;\\
g(3) &= -\frac{1}{2}f(3+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(4) - 3 = -\frac{1}{2}0 - 3 = 0 - 3 = -3\,;\\
g(4) &= -\frac{1}{2}f(4+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(5) - 3 = -\frac{1}{2}7 - 3 = -\frac{7}{2} - 3 = -\frac{13}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Por lo que los puntos $A(-3, 10)$, $B(-2, 7)$, $C(-1, -5)$, $D(0, -8)$, $E(1, -9)$, $F(4, 0)$, $G(5, 7)$ se transforman también respectivamente en $A'(-4, -8)$, $B'\left(-3, -\frac{13}{2}\right)$, $C'\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, $D'(-1, 1)$, $E'\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $F'(3, -3)$, $G'\left(4, -\frac{13}{2}\right)$.

$$
\begin{aligned}
A(-3, 10) &\to (-4, 10) \to (-4, -5) \to A'(-4, -8);\\
B(-2, 7) &\to (-3, 7) \to \left(-3, -\frac{7}{2}\right) \to B'\left(-3, -\frac{13}{2}\right);\\
C(-1, -5) &\to (-2, -5) \to \left(-2, \frac{5}{2}\right) \to C'\left(-2, -\frac{1}{2}\right);\\
D(0, -8) &\to (-1, -8) \to (-1, 4) \to D'(-1, 1);\\
E(1, -9) &\to (0, -9) \to \left(0, \frac{9}{2}\right) \to E'\left(0, \frac{3}{2}\right);\\
F(4, 0) &\to (3, 0) \to (3, 0) \to F'(3, -3);\\
G(5, 7) &\to (4, 7) \to \left(4, -\frac{7}{2}\right) \to G'\left(4, -\frac{13}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Con la información anterior, hacemos el esbozo de la gráfica:



□

(4) ▼

(a) La función $f(x)$ está definida siempre y cuando el radicando sea no negativo

$$|\,3-4x\,|-4\ge 0 \;\Rightarrow\; |\,3-4x\,|\ge 4\,.$$

Esta última desigualdad es equivalente a las siguientes (que se cumplen simultáneamente)

(i) $3-4x\ge 4 \;\Rightarrow\; -1\ge 4x \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{4}\ge x$

o sea,

$$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]\,.$$

(ii) $3-4x\le -4 \;\Rightarrow\; 7\le 4x \;\Rightarrow\; \dfrac{7}{4}\le x$

o sea,

$$x\in\left[\frac{7}{4},+\infty\right)\,.$$

Por lo tanto,

$$D_f=\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]\bigcup\left[\frac{7}{4},+\infty\right)\,.$$

(b) De igual manera $g(x)$ está definida si

$$3-2x\ge 0 \;\Rightarrow\; 3\ge 2x \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\ge x\,;$$

por lo tanto

$$D_g=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\,.$$

Se ve fácilmente que $D_h=\mathbb{R}-\{\,-2,2\,\}$ ya que $x=-2$ y $x=2$ son los ceros de x^2-4.

(c) Calculamos:

$$(h\circ g)(x)=h[g(x)]=h\left(\sqrt{3-2x}\right)=\frac{4}{(\sqrt{3-2x})^2-4}=\frac{4}{-1-2x}=-\frac{4}{2x+1}\,;$$

$x\in D_{h\circ g}$ si cumple dos condiciones:

(i) $x\in D_g \;\Rightarrow\; x\in\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$.

(ii) y $g(x) \in D_h \;\Rightarrow\; \sqrt{3-2x} \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Nos preguntamos para qué valores de x la raíz cuadrada es igual a -2 y a 2.
Nunca es igual a -2 ya que es no negativa.

$\sqrt{3-2x} = 2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = 4 \;\Rightarrow\; -2x = 1 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{1}{2}$.

Tenemos entonces que

$$D_{h\circ g} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] - \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

$\square$