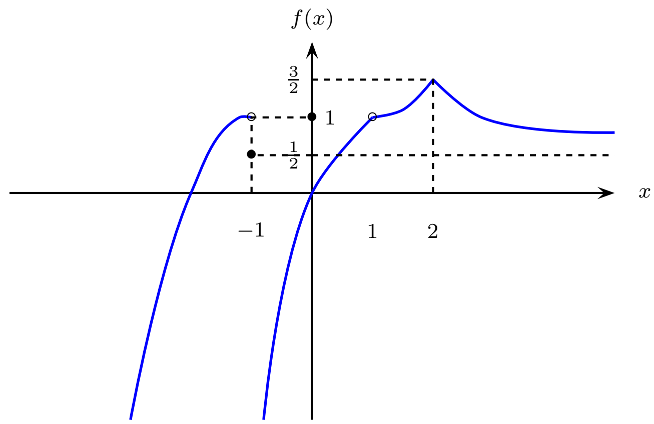
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E0300

(1) La función f tiene la gráfica siguiente



(a) Determine:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x);\quad \lim_{x\to -1^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x);\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x);\quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x);\quad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

(b) Calcule $f(1)$, $f(2)$ y $f(-1)$

(c) ¿Existen los límites $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

(2) Se deja caer una pelota desde lo alto de un edificio. La función de posición de la pelota al tiempo t es

$$S(t) = 78.4 - 4.9t^2.$$

(a) Calcule la velocidad instantánea en el tiempo $t = 4$, calculando el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(4+h) - S(4)}{h}$$

(b) Calcule la posición de la pelota en $t = 4$

(c) Dé una interpretación de su resultado

(3) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 - A & \text{si } x < 1\,; \\ B & \text{si } x = 1\,; \\ \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Determinar los valores de A, B para que la función sea continua en el punto $x = 1$.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

(4) Considere la función

$$h(x) = \frac{x}{x^2 - 25}\,.$$

y determine

(a) El dominio, las raíces y paridad de h

(b) Las asíntotas horizontales y verticales de h

(c) Un bosquejo de la gráfica de h

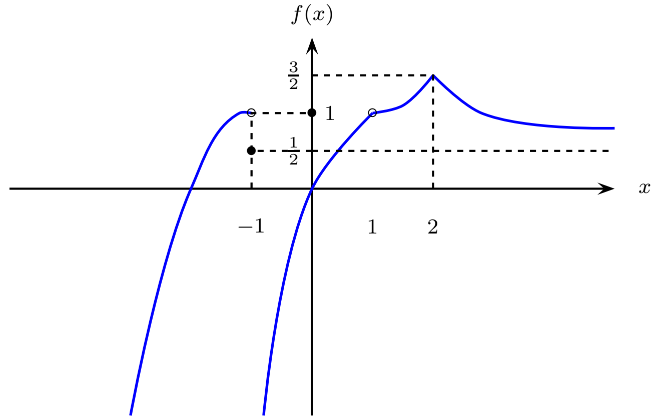
(5) Sea $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x\,.$$

¿Existe un punto $a \in [1,3]$ tal que $f(a) = -15$? Justifique su respuesta.

Respuestas

(1) La función f tiene la gráfica siguiente



(a) Determine:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$; □

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$; □

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$; □

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$; □

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{3}{2}$; □

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{3}{2}$; □

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;

▼ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$; □

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

▼ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$. □

(b) Calcule $f(1)$, $f(2)$ & $f(-1)$

▼

$$f(1) = 0, f(2) = \frac{3}{2}, f(-1) = \frac{1}{2}.$$

□

(c) ¿Existen los límites $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

▼

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ no existe pues no existe $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ pues $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$;

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{3}{2}$ pues $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

□

(2) Se deja caer una pelota desde lo alto de un edificio. La función de posición de la pelota al tiempo t es

$$S(t) = 78.4 - 4.9t^2.$$

(a) Calcule la velocidad instantánea en el tiempo $t = 4$, calculando el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(4+h) - S(4)}{h}$$

▼ Tenemos

$$\begin{aligned}
S(4+h) &= 78.4 - 4.9(4+h)^2 = 78.4 - 4.9(16+8h+h^2) = \\
&= 78.4 - 78.4 - 39.2h - 4.9h^2 = -39.2h - 4.9h^2; \\
S(4) &= 78.4 - 4.9(4^2) = 78.4 - 4.9(16) = 78.4 - 78.4 = 0; \\
S(4+h) - S(4) &= -39.2h - 4.9h^2 - 0 = h(-39.2 - 4.9h); \\
\frac{S(4+h)-S(4)}{h} &= \frac{h(-39.2-4.9h)}{h} = -39.2 - 4.9h \text{ si } h \neq 0; \\
\lim_{h\to 0}\frac{S(4+h)-S(4)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{h(-39.2-4.9h)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}(-39.2-4.9h) = \\
&= \lim_{h\to 0} -39.2 - \lim_{h\to 0} 4.9h = -39.2 - 4.9 \times \lim_{h\to 0} h = \\
&= -39.2 - 4.9(0) = -39.2 - 0 = -39.2\ .
\end{aligned}$$

Que nos indica la velocidad de la pelota en el instante $t = 4$.

□

(b) Calcule la posición de la pelota en $t = 4$

▼ $S(4) = 0$, calculado en inciso (a).

□

(c) Dé una interpretación de su resultado

▼ Al llegar al suelo la pelota tiene una velocidad de -39.2.

□

(3) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 - A & \text{si } x < 1\,; \\ B & \text{si } x = 1\,; \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Determinar los valores de A, B para que la función sea continua en el punto $x = 1$.

▼ Para que $g(x)$ sea continua en el punto $x = 1$, se tiene que cumplir que

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1).$$

Es decir, que

$$\lim_{x\to 1} g(x) = B.$$

Y por lo tanto, que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = B \text{ y que } \lim_{x\to 1^+} g(x) = B.$$

Calculamos entonces

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-}(3x^2 - A) = 3 - A.$$

Calculamos también

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}\ .$$

Observe que aquí hemos racionalizado el numerador multiplicándolo, al igual que el denominador, por el binomio conjugado $\sqrt{x+3}+2$; luego tenemos que

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\times 1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{(1+1)(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{1}{2(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}\,.$$

Luego también

$$\frac{1}{8} = B \;\&\; 3-A = B \Rightarrow A = 3-B = 3-\frac{1}{8} = \frac{23}{8}\,.$$

□

(4) Considere la función

$$h(x) = \frac{x}{x^2-25}$$

y determine:

(a) El dominio, las raíces y paridad de h

▼
Dominio de $h(x)$: $D_h = \mathbb{R} - \{\pm 5\}$ pues $x^2-25=0$ si $x=\pm 5$.
Raíz de $h(x)$: $x=0$, pues es el único punto donde $h(x)=0$.
La función h es impar, ya que

$$h(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-25} = -\frac{x}{x^2-25} = -h(x)\,.$$

□

(b) Las asíntotas horizontales y verticales de h

▼

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-25} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{25}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0\,.$$

Luego, $y=0$ es asíntota horizontal.

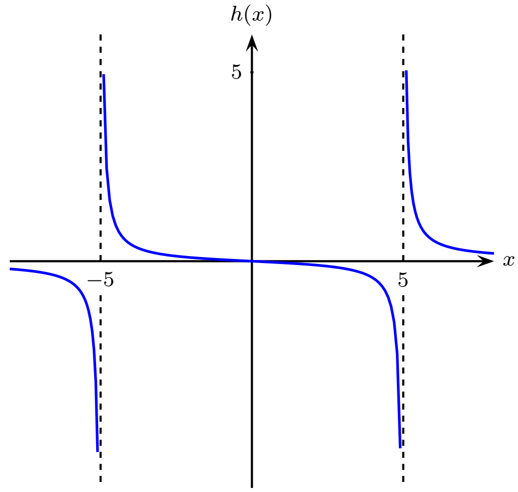
$$\lim_{x\to -5^-} h(x) = \lim_{x\to -5^-} \frac{x}{(x+5)(x-5)} = -\infty, \text{ por ser } x<0,\ x+5<0 \;\&\; x-5<0\,;$$
$$\lim_{x\to -5^+} h(x) = \lim_{x\to -5^+} \frac{x}{(x+5)(x-5)} = +\infty, \text{ por ser } x<0,\ x+5>0 \;\&\; x-5<0\,;$$
$$\lim_{x\to 5^-} h(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{x}{(x+5)(x-5)} = -\infty, \text{ por ser } x>0,\ x+5>0 \;\&\; x-5<0\,;$$
$$\lim_{x\to 5^+} h(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{x}{(x+5)(x-5)} = +\infty, \text{ por ser } x>0,\ x+5>0 \;\&\; x-5>0\,.$$

Luego entonces las rectas $x=-5$ & $x=5$ son asíntotas verticales.

□

(c) Un bosquejo de la gráfica de h

▼ La gráfica de la función $h(x)$ es:



$\square$

(5) Sea f: $[1,3] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x\,.$$

¿Existe un punto $a \in [1,3]$ tal que $f(a) = -15$? Justifique su respuesta.

▼

$$f(1) = 1 - 2 - 10 = -11 \ \& \ f(3) = 27 - 18 - 30 = -21\,.$$

Como $-15 \in [-21, -11]$ y como f es continua en $[1,3]$, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos un punto $a \in (1,3)$ tal que $f(a) = -15$.

$\square$