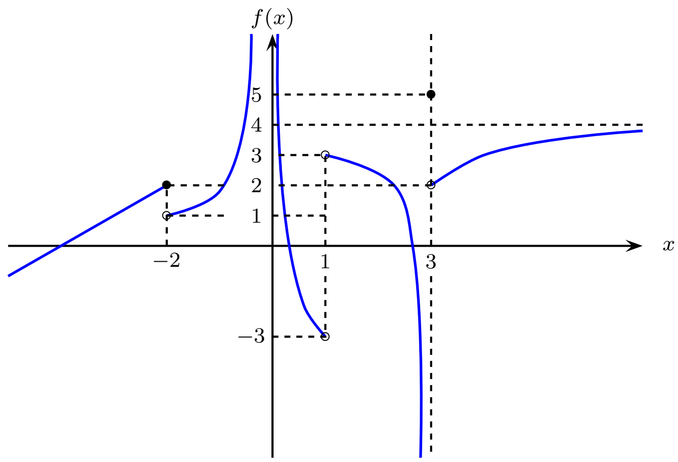
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E0400

(1) La función f tiene la gráfica siguiente



(a) De la gráfica se obtiene que

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x), & \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x), & \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x), & \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x), & \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x), & \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \end{array}$$

(b) Del inciso anterior clasifique las discontinuidades de la función y escriba las ecuaciones de las asíntotas

(2) Para la función

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2}$$

determine
(a) Los puntos de discontinuidad y su clasificación
(b) Los intervalos de continuidad
(c) Las asíntotas verticales y horizontales
(d) Por último esboce su gráfica

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x^2 + 2x - 3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}$.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

(5) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2-2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

Determine sus discontinuidades; clasifíquelas.

(6) La expresión

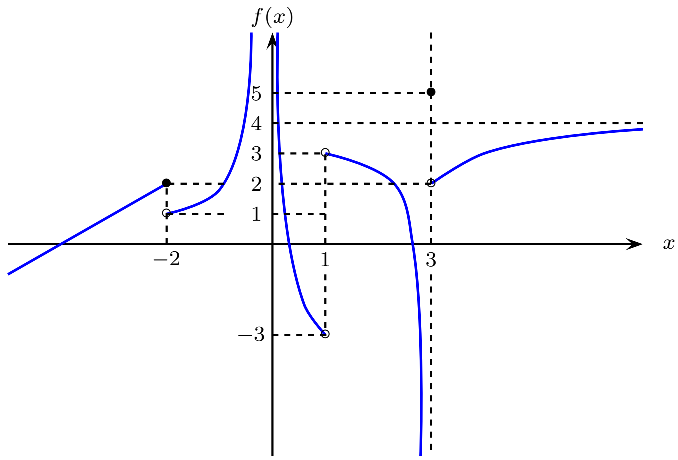
$$L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

indica la longitud de un objeto en función de su velocidad (v), donde L_o es la longitud del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.

¿Qué pasa con la longitud del objeto cuando su v se aproxima a la velocidad de la luz?

Respuestas

(1) La función f tiene la gráfica siguiente



(a) De la gráfica calcular:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 2$; □

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 1$; □

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$; □

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$; □

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -3$; □

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$; □

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$; □

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$; □

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$; □

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$;
▼ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 4$. □

(b) Del inciso anterior clasifique las discontinuidades del la función y escriba las ecuaciones de las asíntotas

▼ En $x = -2$ y en $x = 1$ hay discontinuidad de salto, esencial;
en $x = 0$ hay una discontinuidad infinita;
en $x = 3$ hay una discontinuidad esencial, infinita;
$y = 4$ es asíntota horizontal;
$x = 0$ es asíntota vertical;
$x = 3$ es asíntota vertical.

□

(2) Para la función

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2}$$

determine:

(a) Los puntos de discontinuidad y su clasificación

▼ Sabemos que

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2\,. \end{cases}$$

Entonces, $f(x)$ no es continua en $x = 1$ ni en $x = -2$.
En $x = 1$ hay una discontinuidad esencial, ya que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.
En $x = -2$ hay una discontinuidad removible pues

$$\frac{3x^2 + 12}{x^2 + x - 2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3(x-2)}{x-1} \text{ si } x \neq -2\,.$$

Tenemos que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existe:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{3(x-2)}{x-1} = \frac{3(-4)}{-3} = 4\,.$$

Si definimos

$$f(-2) = 4\,,$$

$f(x)$ resulta continua en $x = -2$.

$\square$

(b) Los intervalos de continuidad.
▼ De lo anterior, $f(x)$ es continua en $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 1) \bigcup (1, \infty)$.

$\square$

(c) Las asíntotas verticales y horizontales
▼ Calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - \dfrac{12}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3 - \dfrac{12}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{12}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x^2}} = \frac{3 - 0}{1 + 0 - 0} = \frac{3}{1} = 3\,.$$

Entonces, $y = 3$ es una asíntota horizontal.
Como

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x^2 - 4)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x-2)}{(x-1)} = \infty$$

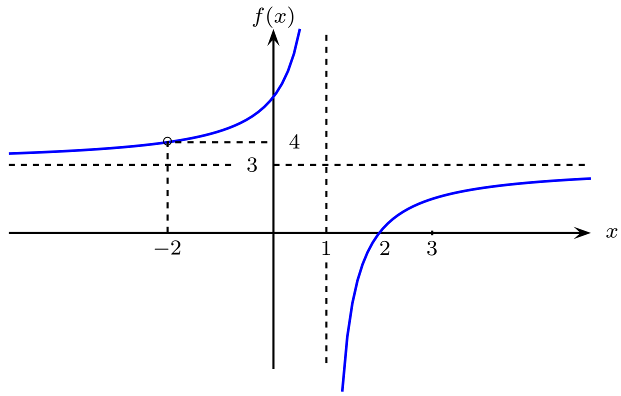
y ya que $x - 1 < 0$ & $x - 2 < 0$,
y que también

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2 - 12}{(x-1)(x+2)} = -\infty\,,$$

entonces, $x = 1$ es una asíntota vertical.
También comprobamos que en $x = 1$ la discontinuidad es infinita.

$\square$

(d) Por último, esboce su gráfica
▼ Observemos que $f(2) = 0$, entonces la gráfica es



$\square$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x^2+2x-3}$.

▼ Racionalicemos el numerador y factoricemos el denominador

$$\frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x^2+2x-3} = \frac{(\sqrt{3x+1}-2x)(\sqrt{3x+1}+2x)}{(x+3)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)} = \frac{3x+1-4x^2}{(x+3)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)} \,.$$

Ya que $x=1$ es raíz de $-4x^2+3x+1$, entonces $x-1$ divide al trinomio

$$\begin{array}{r|l} & \;-4x-1 \\ \cline{2-2} x-1 & \;-4x^2+3x+1 \\ & \;\underline{+4x^2-4x} \\ & \qquad\quad -x+1 \\ & \qquad\quad \underline{+x-1} \\ & \qquad\qquad 0\,. \end{array}$$

Luego entonces, $-4x^2+3x+1 = (x-1)(-4x-1)$, por lo cual si $x \neq 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+1-4x^2}{(x+3)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-4x-1}{(x+3)(\sqrt{3x+1}+2x)} =$$

$$= \frac{-4-1}{(1+3)(\sqrt{3+1}+2)} = \frac{-5}{4(2+2)} = -\frac{5}{16} \,.$$

$\square$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}$.

▼ Supongamos que $x<0$; entonces, multipliquemos numerador y denominador por

$$\frac{1}{-x} = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \,;$$

$$\frac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}} = \frac{-4-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}} \,.$$

Con ello

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}}=\frac{-4}{\sqrt{9}}=-\frac{4}{3}\,.$$

En este caso $|x|=-x$, pues $x\to-\infty$; además

$$\frac{\sqrt{9x^2+5}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{9x^2+5}{x^2}}=\sqrt{9+\frac{5}{x^2}}\,.$$

□

(5) Considere la función

$$g(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x<1\\ 4 & \text{si } x=1\\ x^2-2 & \text{si } 1<x\le 2\\ 3 & \text{si } 2<x\,.\end{cases}$$

Determine sus discontinuidades; clasifíquelas.

▼ Calculamos

$$\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}(2x-3)=\lim_{x\to1^-}2x-3=2-3=-1\,;$$
$$\lim_{x\to1^+}g(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2-2)=\lim_{x\to1^+}x^2-2=1-2=-1\,.$$

Como

$$\text{el }\lim_{x\to1}g(x)=-1\neq g(1)=4,$$

entonces en $x=1$, $g(x)$ tiene una discontinuidad removible: si redefinimos $g(1)=-1$, $g(x)$ se hace continua.
Ahora bien,

$$\lim_{x\to2^-}g(x)=\lim_{x\to2^-}(x^2-2)=\lim_{x\to2^-}x^2-2=4-2=2\,;$$
$$\lim_{x\to2^+}g(x)=\lim_{x\to2^+}3=3\,.$$

Como

$$\lim_{x\to2^-}g(x)\neq\lim_{x\to2^+}g(x)\,,$$

entonces en $x=2$ la función $g(x)$ tiene una discontinuidad esencial, de salto.

□

(6) La expresión

$$L=L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

indica la longitud de un objeto en función de su velocidad (v), donde L_o es la longitud del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.
¿Qué pasa con la longitud del objeto cuando su v se aproxima a la velocidad de la luz?

▼ En primer lugar observemos que $1-\dfrac{v^2}{c^2}$ tiene que ser ≥ 0.
Entonces,

$$\frac{v^2}{c^2}\le 1\Rightarrow v^2\le c^2$$

y extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros, tenemos que

$$\sqrt{v^2} \leq \sqrt{c^2} \Rightarrow v = |v| \leq |c| = c\,.$$

Con lo cual la velocidad del objeto no puede ser mayor que la de la luz:

$$\lim_{v\to c^-} L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = L_o \lim_{v\to c^-}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = L_o\sqrt{1-\lim_{v\to c^-}\frac{v^2}{c^2}} = L_o\sqrt{1-1} = 0\,.$$

$\square$