CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E0500

(1) Dar una posible gráfica para una función f que sea continua en su dominio $\mathbb{R} - \{ -2, 0, 2 \}$ y que satisfaga las condiciones:

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty; & \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 1; \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3; & \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \infty; & \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty; \\ \lim\limits_{x\to1} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to2} f(x) = 3; & f(1) = 0\,. \end{array}$$

(2) Considere la función

$$g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-4}\,.$$

(a) Obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de g
(b) Obtener el dominio, raíces e intervalos de continuidad de esta función
(c) Bosquejar su gráfica

(3) La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve está dada aproximadamente por la fórmula

$$T = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03}$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar (medida en metros).
Use el teorema del Valor Intermedio y diga si entre los 4 000 y 4 500 metros sobre el nivel del mar hay una altitud a la cual hierve a 98°C. Justifique su respuesta.

(4) Considere la función:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}-x} & \text{si } x \le -1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} & \text{si } x > -1\,. \end{cases}$$

(a) Calcule el $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$
(b) ¿Existe $\lim\limits_{x\to-1} h(x)$? Justifique su respuesta

(5) La gráfica de la función

$$f(t) = -t^2 + 2t + 3$$

pasa por los puntos $(1.999, f(1.999))$ y $(2.001, f(2.001))$.
(a) Obtenga el valor de la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de f que pasen por el punto $(2, 3)$ y por los puntos dados
(b) ¿Qué puede decir de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 3)$?

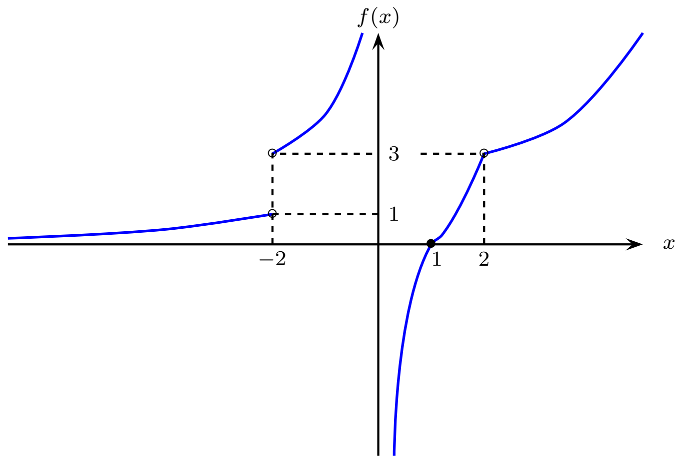
canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Dar una posible gráfica para una función f que sea continua en su dominio $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ y que satisfaga las condiciones:

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty; & \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 1; \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3; & \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \infty; & \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty; \\ \lim\limits_{x\to1} f(x) = 0; & \lim\limits_{x\to2} f(x) = 3; & f(1) = 0\,. \end{array}$$

▼ Su posible gráfica es



□

(2) Considere la función

$$g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4}\,.$$

(a) Obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de g

▼ Para averiguar las posibles asíntotas horizontales, calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2 + \frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1 - \frac{4}{x^2})} = \frac{2 + \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2}}{1 - \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{2+0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2\,.$$

Entonces la recta $y = 2$ es asíntota horizontal.

Como

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \ \&\ 2x^2 + 1 > 0, \text{ para cada } x$$

calculamos

$$\lim_{x\to2^\pm} \frac{2x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to2^\pm} \frac{2x^2+1}{(x+2)(x-2)} = \pm\infty.$$

Entonces $x = 2$ es asíntota vertical, y como la función es par, $x = -2$ también lo es.

□

(b) Obtener el dominio, raíces e intervalos de continuidad de esta función

▼ Dominio: $D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

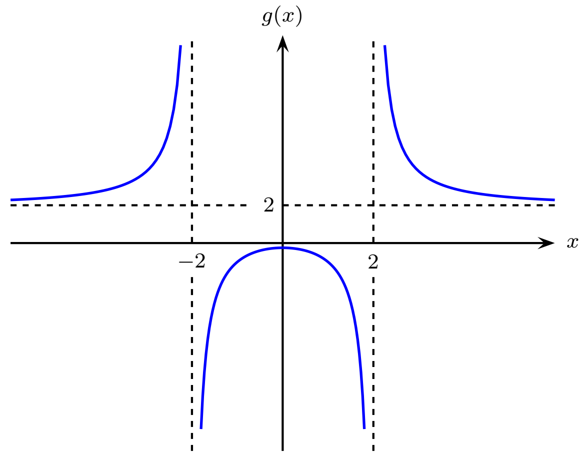
No tiene raíces, pues el numerador $2x^2 + 1 > 0$;
la función g es continua en $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 2) \bigcup (2, +\infty)$.

□

(c) Bosquejar su gráfica

▼ Adicionalmente $g(0) = \dfrac{1}{-4} = -\dfrac{1}{4}$.

La gráfica de la función $g(x)$ es:



□

(3) La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve está dada aproximadamente por la fórmula

$$T = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03}$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar (medida en metros).
Use el teorema del Valor Intermedio y diga si entre los 4 000 y 4 500 metros sobre el nivel del mar hay una altitud a la cual hierve a 98°C. Justifique su respuesta.

▼ Por un lado sabemos que la función $T(h)$ es continua en su dominio, el cual es el conjunto de los h que cumplen

$$h + 431.03 \geq 0 \Rightarrow h \geq -431.03 \text{ m};$$

por otro,

$$T(4\,000) = 100.862 - 0.0415\sqrt{4\,000 + 431.03} \approx 98.099512\ ^\circ\text{C};$$

también

$$T(4\,500) = 100.862 - 0.0415\sqrt{4\,500 + 431.03} \approx 97.947816\ ^\circ\text{C}.$$

Como $98 \in (97.9, 98.1)$ °C,

Entonces efectivamente existe una $h \in (4\,000, 4\,500)$ tal que $T(h) = 98\,^\circ$C.

□

(4) Considere la función:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} & \text{si } x \leq -1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x+5} - 2}{x+1} & \text{si } x > -1\,. \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$

▼ Cuando $x \to -\infty$, podemos pensar que $x < 0$; entonces

$$h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x} - x}\,.$$

También $\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{|\, x \,|}$; en este caso y multiplicando el numerador por $\dfrac{1}{x}$ y el denominador por $\dfrac{-1}{|\, x \,|} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2}}$, tenemos que

$$h(x) = \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{-(\sqrt{x^2 - 2x} - x)}{\sqrt{x^2}}} = \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{-\sqrt{\dfrac{x^2 - 2x}{x^2}} + \dfrac{x}{|\, x \,|}} = \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \dfrac{2}{x}} + \dfrac{x}{-x}} = \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \dfrac{2}{x}} - 1}$$

y también que

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \dfrac{2}{x}} - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}\,.$$

□

(b) ¿Existe $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$? Justifique su respuesta

▼ Calculemos los límites laterales de $h(x)$ en $x = -1$.

Racionalizando el numerador (multiplicando por el conjugado del numerador ambas partes de la fracción), tenemos para $x \neq -1$

$$\frac{\sqrt{x+5} - 2}{x+1} = \frac{(\sqrt{x+5} - 2)(\sqrt{x+5} + 2)}{(x+1)(\sqrt{x+5} + 2)} =$$
$$= \frac{x + 5 - 4}{(x+1)(\sqrt{x+5} + 2)} = \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+5} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+5} + 2}\,.$$

Entonces

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x+5} + 2} = \frac{1}{\sqrt{-1+5} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

y también

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \frac{-1-1}{\sqrt{(-1)^2 - 2(-1)} - (-1)} = \frac{-2}{\sqrt{1+2} + 1} = \frac{-2}{\sqrt{3} + 1}\,,$$

por lo que no existe el $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ pues el $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^-} h(x)$.

□

(5) La gráfica de la función

$$f(t) = -t^2 + 2t + 3$$

pasa por los puntos $(1.999, f(1.999))$ y $(2.001, f(2.001))$.

(a) Obtenga el valor de la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de f que pasen por el punto $(2, 3)$ y por los puntos dados

▼

$$m_1 = \frac{3 - f(1.999)}{2 - 1.999} = \frac{3 - (-3.996001 + 3.998 + 3)}{0.001} = \frac{3 - (3.001999)}{0.001} = \frac{-0.001999}{0.001} = -1.999\,;$$
$$m_2 = \frac{3 - f(2.001)}{2 - 2.001} = \frac{3 - (-4.004001 + 4.002 + 3)}{-0.001} = \frac{3 - (2.997999)}{-0.001} = \frac{0.002001}{-0.001} = -2.001\,.$$

□

(b) ¿Qué puede decir de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 3)$?

▼ Que debe ser muy cercana a -2, pues debe estar entre -1.999 y -2.001.

□