CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E600

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,| - x}{x}$.

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3} \right)$.

(3) Encontrar el valor de las constantes a, b de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ x + a & \text{si } 0 < x < 1 \\ 6 + b & \text{si } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

(4) Halle las raíces, las discontinuidades y su tipo, las asíntotas verticales y horizontales y bosqueje la gráfica de la función

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 8x + 15}\,.$$

(5) Verifique que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 & 1. Dé un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ que contenga dicha raíz.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,| - x}{x}$.

▼ Ya que $|\,x\,| = x$ para $x > 0$ y también que $|\,x\,| = -x$ para $x < 0$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\,x\,| - x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (\frac{x}{x} - \frac{x}{x}) = \lim_{x\to 0^+} (1 - 1) = \lim_{x\to 0^+} (0) = 0\,;$$

y además

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,| - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -2 = -2\,.$$

Entonces no existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,| - x}{x}$, pues los límites laterales son distintos.

□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3} \right)$.

▼ Efectuamos operaciones primero.
Se sabe que

$$1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)\,.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3} = \frac{1 + x + x^2 - 1}{1 - x^3} = \frac{x + x^2}{1 - x^3} = \frac{x(x+1)}{1 - x^3}\ .$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1 - x^3) = 0$ y como $\displaystyle\lim_{x\to 1} x(x+1) = 1 \times 2 = 2$, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3} \right)$ no existe (de hecho los límites laterales son $\pm\infty$).

□

(3) Encontrar el valor de las constantes a, b de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ x + a & \text{si } 0 < x < 1 \\ 6 + b & \text{si } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

▼ La función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \bigcup (0, 1) \bigcup (1, +\infty)$.
Tenemos que obligar a que también sea continua en $x = 0$ y en $x = 1$ haciendo que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \text{ y } \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)\,.$$

Calculemos pues

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + 3) = 0 + 3 = 3\,;$$

y también

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x + a) = 0 + a = a\,.$$

Entonces, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ existe si y sólo si $a = 3$.

Así también

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+a) = 1 + a = 1 + 3 = 4;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(6+b) = 6 + b,$$

entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe si y sólo si $4 = 6 + b \Rightarrow b = -2$.

□

(4) Halle las raíces, las discontinuidades y su tipo, las asíntotas verticales y horizontales y bosqueje la gráfica de la función

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 8x + 15}\,.$$

▼ Las raíces son los puntos x tales que $g(x) = 0$; es decir, donde

$$x^2 + x - 12 = 0\,;$$

y como

$$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)\,,$$

éstas serían $x = -4$ & $x = 3$.
Pero $g(x)$ es discontinua en los puntos x donde $x^2 - 8x + 15 = 0$;
y como

$$x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)\,,$$

$g(x)$ es discontinua en $x = 3$ y en $x = 5$.

Desde luego, en $x = 5$ hay una discontinuidad esencial (de hecho es infinita).

En $x = 3$ la discontinuidad es removible pues

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x-5} = \frac{7}{-2}\,;$$

y si definiéramos $g(3) = -\dfrac{7}{2}$, la función resultaría continua en $x = 3$.
Así queda que la única raíz es $x = -4$, pues $3 \notin D_g$.

Para calcular las asíntotas horizontales veamos

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}}{1 - \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} = \frac{1 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = \frac{1}{1} = 1\,;$$

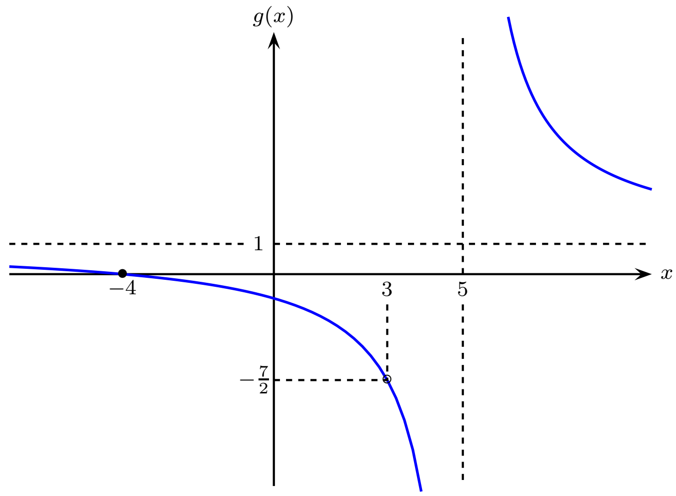
luego, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

Para determinar las asíntotas verticales calculemos

$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = \lim_{x\to 5^-}\frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x\to 5^-}\frac{x+4}{x-5} = -\infty, \text{ ya que } x + 4 > 0 \ \&\ x - 5 < 0\,;$$
$$\lim_{x\to 5^+} g(x) = \lim_{x\to 5^+}\frac{x+4}{x-5} = +\infty, \text{ ya que } x + 4 > 0 \ \&\ x - 5 > 0\,;$$

luego, la recta $x = 5$ es asíntota vertical.

Por último, la gráfica se verá de la siguiente forma



□

(5) Verifique que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 & 1. Dé un intervalo de longitud $\dfrac{1}{4}$ que contenga dicha raíz.

▼ Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.
Notamos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[0, 1]$ y que $f(0) = -1 < 0$ y también que $f(1) = 1 > 0$;
luego, por el teorema del Valor Intermedio, en $(0, 1)$ habrá un punto x tal que $f(x) = 0$.
Vemos que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} - 1 < 0$.
Por lo que la raíz debe estar en $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.
También vemos que $f(\dfrac{3}{4}) = \dfrac{27}{64} + \dfrac{3}{4} - 1 > 0$.
Por lo que, por último, la raíz debe de estar en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.
Este último intervalo tiene longitud $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3-2}{4} = \dfrac{1}{4}$.

□