CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E0700

(1) Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}\,.$$

(a) Obtenga su dominio y sus raíces
(b) Clasifique, de la misma función, sus puntos de discontinuidad
(c) Dé las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales
(d) En base a la información obtenida en los incisos anteriores, haga un bosquejo de la gráfica de f

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}\,.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}\,.$

(4) Si

$$g(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 + k & \text{si } x > -1\,. \end{cases}$$

¿Cuánto tiene que valer k para que la función g sea continua en todo su dominio?

(5) Grafique una función que cumpla con los siguientes requisitos:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0; & f(5) = 1; \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3; & \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty; \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3; & \displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = -3. \\ \displaystyle\lim_{x\to 5} f(x) = 4; & \end{array}$$

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Dada la función
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}\,.$$

(a) Obtenga su dominio y sus raíces

▼

Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}$.

Raíces: como
$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1\,,$$
entonces
$$D_f = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}\,.$$
Las raíces deberían ser los puntos donde
$$x^2 - 2x + 1 = 0\,,$$
pero $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ es cero solamente si $x = 1$, pero $1 \notin D_f$.

Entonces, la función $f(x)$ no tiene raíces.

□

(b) Clasifique, de la misma función, sus puntos de discontinuidad

▼ La función $f(x)$ es continua en todo su dominio.

En $x = 0$ tiene una discontinuidad infinita pues
$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x-1}{x(x+1)} = \mp\infty\,.$$
Además $x = 0$ es una asíntota vertical.

En $x = -1$ también tiene una discontinuidad infinita, pues
$$\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{x-1}{x(x+1)} = \pm\infty; \text{ e igualmente}$$
$x = -1$ también es una asíntota vertical;

pero en $x = 1$ la discontinuidad es removible pues
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0\,.$$
En fin, la función $f(x)$ es continua en $x = 1$, redefiniendo $f(1) = 0$.

□

(c) Dé las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales

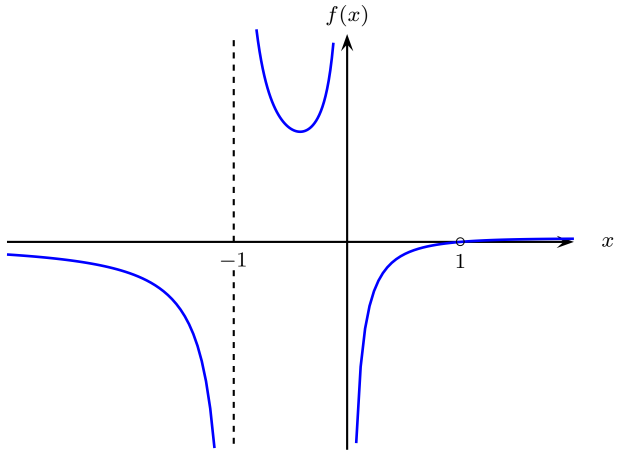
▼ En el inciso anterior vimos que $x = 0$ y que $x = -1$ son asíntotas verticales.

Para hallar las asíntotas horizontales calculamos
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0\,.$$
Entonces, $y = 0$ es asíntota horizontal.

□

(d) En base a la información obtenida en los incisos anteriores, haga un bosquejo de la gráfica de f

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



$\square$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}$.

▼ Como $x\to-\infty$, podemos pensar que $x<0$ por lo que

$$\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\frac{1}{|\,x\,|}=\frac{1}{-x}\ \text{o bien}\ \frac{1}{x}=-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\ ;$$

y, multiplicando al numerador y denominador de $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}$ por $\dfrac{1}{x}$ o bien por $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$, tenemos que

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}=\frac{-\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{x+4}{x}}=-\frac{\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x^2}}}{1+\dfrac{4}{x}}=-\frac{\sqrt{1-\dfrac{16}{x^2}}}{1+\dfrac{4}{x}}\,.$$

Por lo que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{1-\dfrac{16}{x^2}}}{1+\dfrac{4}{x}}=-\frac{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{16}{x^2}}}{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{16}{x^2}\right)}}{1+0}=-\frac{\sqrt{1-0}}{1}=-1\,.$$

$\square$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$.

▼ Racionalicemos el numerador multiplicando al numerador y al denominador por la expresión conjugada $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}=\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}=\frac{2x+1-3}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{2x-2}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}=\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}=\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}},\ \text{con}\ x\neq1\,.$$

Entonces obtenemos que

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

□

(4) Si

$$g(x)=\begin{cases} kx-3 & \text{si } x\le -1\\ x^2+k & \text{si } x>-1\,.\end{cases}$$

¿Cuánto tiene que valer k para que la función g sea continua en todo su dominio?

▼ Sabemos que para que $g(x)$ sea continua en $x=-1$ (único punto donde hay duda) se tiene que cumplir que el $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=g(-1)$.
Como $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=1+k$ & $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=-k-3$,
entonces $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ existe si

$$1+k=-k-3\Rightarrow 2k=-4\Rightarrow k=-2\,.$$

Con $k=-2$ se tiene que

$$g(x)=\begin{cases} -2x-3 & \text{si } x\le -1\\ x^2-2 & \text{si } x>-1\,.\end{cases}$$

Notamos ahora que $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=-1$ y además que $g(-1)=2-3=-1$, por lo cual

$$\lim_{x\to -1} g(x)=g(-1)\,.$$

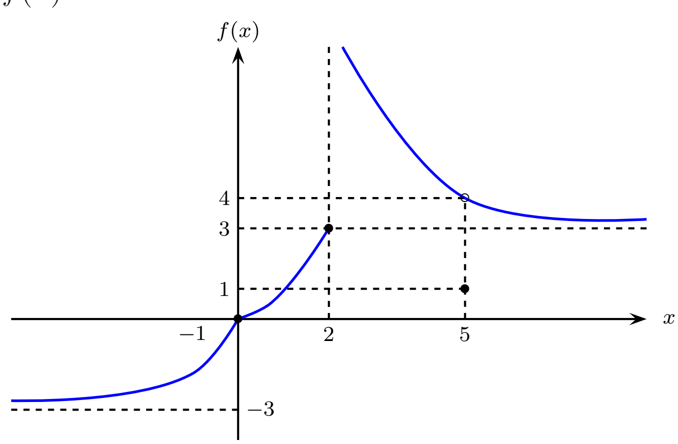
g es continua en $x=-1$.

□

(5) Grafique una función que cumpla con los siguientes requisitos:

$$\begin{array}{cc} f(0)=0; & f(5)=1;\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3; & \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty;\\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3; & \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-3.\\ \lim\limits_{x\to 5} f(x)=4; & \end{array}$$

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



□