CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E0800

(1) Un helicóptero se está elevando verticalmente desde el suelo. La distancia del helicóptero al suelo t segundos después del despegue es $s(t)$ metros, donde

$$s(t) = t^2 + t\,.$$

(a) ¿En qué tiempo se encuentra el helicóptero a 20 metros?
(b) Use la definición de derivada para determinar la velocidad instantánea del helicóptero cuando éste se encuentra a 20 metros.

(2) Grafique una función que cumpla con los siguientes requisitos:

$$\begin{array}{cc} f(0) = 0; & f(5) = 1; \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3; & \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty; \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3; & \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -3. \\ \lim\limits_{x\to 5} f(x) = 4; & \end{array}$$

(3) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}$.
(a) Determinar, dominio y raíces
(b) Determinar intervalos de continuidad y clasificar las discontinuidades
(c) Determinar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales
(d) En base a lo anterior hacer el esbozo gráfico de f

(4) Determinar un intervalo de longitud 0.5 que contenga una raíz de la ecuación $x^3 + 2x + 4 = 0$.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Un helicóptero se está elevando verticalmente desde el suelo. La distancia del helicóptero al suelo t segundos después del despegue es $s(t)$ metros, donde

$$s(t) = t^2 + t\,.$$

(a) ¿En qué tiempo se encuentra el helicóptero a 20 metros?

▼ $s(t) = 20 \Leftrightarrow t^2 + t = 20 \Leftrightarrow t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow (t+5)(t-4) = 0 \Leftrightarrow t = -5$ o bien $t = 4$.
Luego entonces, $s(t) = 20$ metros cuando $t = 4$ segundos, ya que $t = -5$ se desecha por ser negativo.

□

(b) Use la definición de derivada para determinar la velocidad instantánea del helicóptero cuando éste se encuentra a 20 metros.

▼ La velocidad instantánea en $t = 4$ es

$$\begin{aligned} v(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(4+h) - s(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(4+h)^2 + (4+h)] - [4^2 + 4]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16 + 8h + h^2 + 4 + h - 20}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}(9 + h) = 9\,. \end{aligned}$$

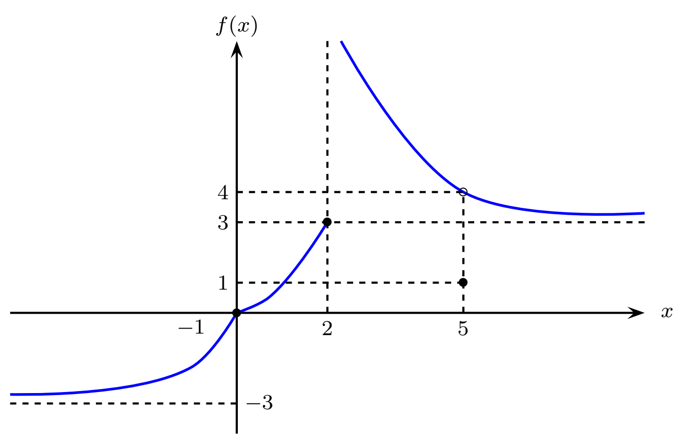
Es decir, $v(4) = 9$ m/s.

□

(2) Grafique una función que cumpla con los siguientes requisitos:

$$\begin{array}{cc} f(0) = 0; & f(5) = 1; \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3; & \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty; \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3; & \lim_{x\to -\infty} f(x) = -3. \\ \lim_{x\to 5} f(x) = 4; & \end{array}$$

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



□

(3) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}$.

(a) Determinar dominio y raíces

▼
Por ser f una función racional, su dominio es

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^2 + x - 2 = 0 \right\} = \\ &= \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, (x+2)(x-1) = 0 \right\} = \\ &= \mathbb{R} - \left\{ -2, 1 \right\} . \end{aligned}$$

Raíces: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ o bien $x = 4$.
Pero, $x = 1 \notin D_f$, por lo cual f tiene sólo una raíz, que es $x = 4$.

□

(b) Determinar intervalos de continuidad y clasificar las discontinuidades
▼ Por ser una función racional, f es continua en todo su dominio; es decir, f es continua en el conjunto $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 1) \bigcup (1, +\infty)$.
Las discontinuidades de f están en $x = -2$ y en $x = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2} = \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x-4}{x+2} = \\ &= \frac{1-4}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1 . \end{aligned}$$

Entonces f tiene en $x = 1$ una discontinuidad evitable o removible.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x-4}{x+2} = \infty ,$$

$$\text{ya que } (x+2) \to 0 \ \& \ (x-4) \to -6 \text{ cuando } x \to -2 .$$

Por esto podemos decir que la función f tiene en $x = -2$ una discontinuidad esencial infinita.

□

(c) Determinar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales
▼ Asíntotas verticales: precisamos $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ vía sus límites laterales.

(i) Si $x \to -2^-$, entonces $x < -2$, por lo que $x + 2 < 0$; y como $x - 4 < 0$ (ya que $x - 4 \to -6$), entonces $\dfrac{x-4}{x+2} > 0$. Por lo tanto

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x-4}{x+2} = +\infty .$$

(ii) Si $x \to -2^+$, entonces $x > -2$, por lo que $x + 2 > 0$; y como $x - 4 < 0$, entonces $\dfrac{x-4}{x+2} < 0$. Luego,

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x-4}{x+2} = -\infty .$$

Podemos afirmar ahora que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical de f y que además es la única.

Asíntotas horizontales:

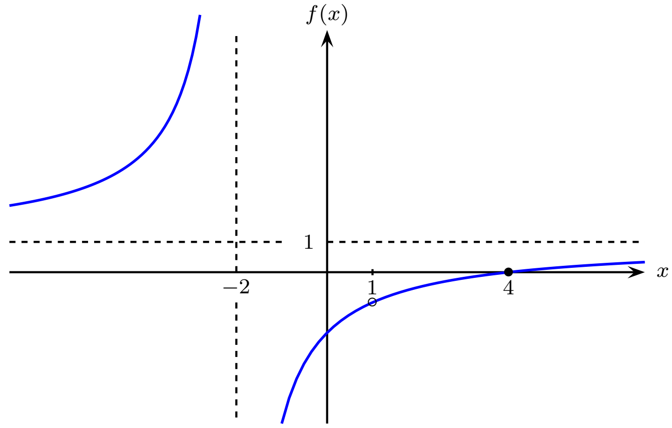
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-4}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{4}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Entonces la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de f. Además es la única, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

□

(d) En base a lo anterior hacer el esbozo gráfico de f

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



□

(4) Determinar un intervalo de longitud 0.5 que contenga una raíz de la ecuación $x^3 + 2x + 4 = 0$.

▼ Sea $f(x) = x^3 + 2x + 4$, que por ser polinomial es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Vemos ahora que $f(0) = 4$; $f(-1) = -1 - 2 + 4 = 1$; $f(-2) = -8 - 4 + 4 = -8$.

Ya que $f(-2) = -8 < 0$ y que $f(-1) = 1 > 0$, entonces por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos una raíz en el intervalo $(-2, -1)$.

El punto medio del intervalo $(-2, -1)$ es $-\dfrac{3}{2}$ y como $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{27}{8} - 3 + 4 = 1 - \dfrac{27}{8} = -\dfrac{19}{8} < 0$, entonces existe al menos una raíz en el intervalo $\left(-\dfrac{3}{2}, -1\right)$.

Ya que la longitud del intervalo $\left(-\dfrac{3}{2}, -1\right)$ es $\dfrac{1}{2}$, entonces se puede afirmar que $\left(-\dfrac{3}{2}, -1\right)$ es un intervalo de longitud 0.5 que contiene al menos una raíz de la ecuación $x^3 + 2x + 4 = 0$.

□