CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E0900

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} |\,x\,|^3 \left(x+1-\frac{2}{x}\right)$.

(3) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x-x^2}{|\,x-1\,|} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

¿Se puede definir $f(0)$ y $f(1)$ de manera que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$?

(4) Hallar dónde es continua la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2\sqrt{x}+3x-2x\sqrt{x}-3}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 5 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(5) Sea la función

$$g(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}\,.$$

Bosqueje la gráfica de $g(x)$ y obtenga explícitamente: raíces, discontinuidades y su clasificación, asíntotas e intervalos de continuidad.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}$.

▼ Multipliquemos numerador y denominador por $\dfrac{1}{x}$ y como $x\to\infty$, podemos suponer que $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{|\,x\,|}$ y por ende que $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$; entonces

$$\frac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}=\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{\sqrt{(3x-2)^3}}{\sqrt{x^2}}}=\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{\dfrac{27x^3-54x^2+36x-8}{x^2}}}=\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{27x-54+\dfrac{36}{x}-\dfrac{8}{x^2}}}$$

y también,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{27x-54+\dfrac{36}{x}-\dfrac{8}{x^2}}}=0\,.$$

□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}|\,x\,|^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)$.

▼ Como $|\,x\,|$ cambia de signo en 0, calculamos por separado

$$\lim_{x\to 0^+}|x|^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}x^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}(x^4+x^3-2x^2)=0\,,$$

así como

$$\lim_{x\to 0^-}|x|^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}(-x)^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}(-x^4-x^3+2x^2)=0\,.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0}|\,x\,|^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)=0\,.$$

□

(3) Sea

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{x-1} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{x-x^2}{|\,x-1\,|} & \text{si } 0<x<1\\[2mm] 2x+1 & \text{si } x>1\,.\end{cases}$$

¿Se puede definir $f(0)$ y $f(1)$ de manera que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$?

▼ Debemos calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$, y, para ello, los cuatro límites laterales respectivos, a saber

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x-1}=\frac{0}{-1}=0$$

y también

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-x^2}{|\,x-1\,|}=\frac{0-0}{|\,0-1\,|}=\frac{0}{1}=0\,.$$

Entonces, definiendo $f(0)=0$, la función $f(x)$ resulta continua en 0.
Ahora,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-x^2}{|\,x-1\,|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(1-x)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(1-x)}{1-x)} = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

y también

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x+1) = 2\times 1 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Entonces, no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ por lo que en $x=1$, la función $f(x)$ tiene una discontinuidad esencial, de salto, pues $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y no podemos definir $f(1)$ de manera que la función $f(x)$ resulte continua en 1.

□

(4) Hallar dónde es continua la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2\sqrt{x}+3x-2x\sqrt{x}-3}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 5 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

▼ En el único punto $x \geq 0$ donde hay duda es en $x=1$; luego, calculamos $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ y observamos que

$$h(x) = \frac{2x^2\sqrt{x}+3x-2x\sqrt{x}-3}{x-1} = \frac{2x\sqrt{x}(x-1)+3(x-1)}{x-1} = \frac{(x-1)(2x\sqrt{x}+3)}{x-1}\,.$$

Si $x \neq 1 \Rightarrow x-1 \neq 0$, entonces, por lo anterior

$$h(x) = 2x\sqrt{x}+3\,.$$

Por lo que

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}(2x\sqrt{x}+3) = 2\times 1\sqrt{1}+3 = 2\times 1 + 3 = 5\,.$$

Comprobamos que la función $h(x)$ resulta continua en $x=1$ pues $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = h(1)$.
También comprobamos que $h(x)$ resulta continua en todo su dominio, que es el intervalo $[0,+\infty)$.

□

(5) Sea la función

$$g(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}\,.$$

Bosqueje la gráfica de $g(x)$ y obtenga explícitamente: raíces, discontinuidades y su clasificación, asíntotas e intervalos de continuidad.

▼
Las raíces de la función $g(x)$ son los puntos de su dominio tales que $g(x)=0$.
Sabemos que

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2-8x+15 = (x-3)(x-5) = 0 \,\right\} = \mathbb{R} - \{\,3,5\,\}\,.$$

Para que $g(x)=0$, se necesita que

$$x^2+x-12 = (x+4)(x-3) = 0\,,$$

es decir, que $x=3$ o bien que $x=-4$.
Pero, como $x = 3 \notin D_g$ entonces la única raíz de $g(x)$ es $x=-4$.

Discontinuidades:

La función $g(x)$ es discontinua en $x=3$ y en $x=5$, por lo que es continua en su dominio

$$(-\infty,3)\bigcup(3,5)\bigcup(5,+\infty)$$

que son los tres intervalos de continuidad.

La discontinuidad en $x=3$ es removible, ya que calculando

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x-5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x-5}=\frac{3+4}{3-5}=-\frac{7}{2}\,,$$

si definimos $g(3)=-\dfrac{7}{2}$, $g(x)$ resulta continua también en 3.

En cambio en $x=5$ la discontinuidad es esencial, de hecho es infinita pues

$$\lim_{x\to 5^{\pm}} g(x)=\lim_{x\to 5^{\pm}}\frac{x+4}{x-5}=\pm\infty\,.$$

Asíntotas:

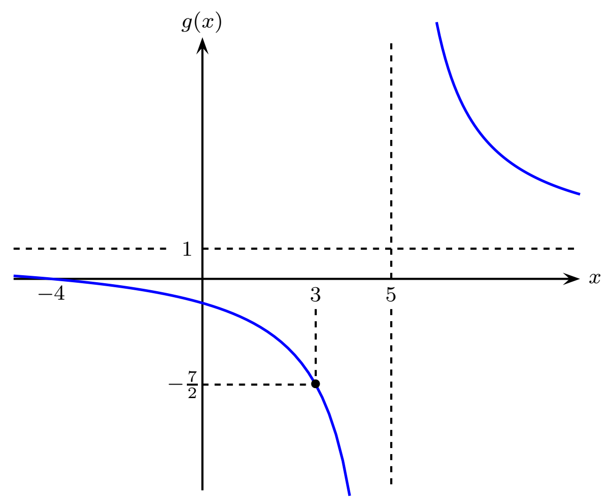
Aquí mismo vemos que $x=5$ es asíntota vertical.

Para hallar las asíntotas horizontales calculemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{12}{x^2}}{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{15}{x}}=1$$

con lo que comprobamos que la recta $y=1$ es la asíntota horizontal.

La gráfica de la función $g(x)$ es:



$\square$