CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E0100

(1) Si

$$f(x) = 4 - x^2,$$

usando la definición de la derivada, calcular $f'(a)$.
Calcular también, usando lo anterior, $f'(-2)$ y $f'(1)$.

(2) Graficar una función $f(x)$ continua en los intervalos $(-\infty,-2),(-2,1),(1,3),(3,+\infty)$, que cumpla las siguientes condiciones:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$; $\quad \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = +\infty$; $\quad f(1) = 0$;
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$; $\quad f(x)$ tiene discontinuidad removible en $x = 1$.
$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$;

(3) Sea

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9,$$

explique y demuestre que hay, al menos, un número a entre 0 & 10 tal que $f(a) = 500$.

(4) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-6x+8} & \text{si } x \neq 2 \text{ y } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 2\,; \end{cases}$$

determinar para la función g:

(a) Dominio y raíces
(b) Intervalos de continuidad y clasificación de discontinuidades
(c) Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales
(d) Bosquejo gráfico

(5) Determinar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \notin [-2,2] \\ ax^2+bx & \text{si } x \in [-2,2] \end{cases}$$

sea continua en todos los reales.

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Si

$$f(x) = 4 - x^2,$$

usando la definición de la derivada, calcular $f'(a)$.
Calcular también, usando lo anterior, $f'(-2)$ y $f'(1)$.

▼ Calculamos el cociente diferencial

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{(4 - x^2) - (4 - a^2)}{x - a} = \frac{4 - x^2 - 4 + a^2}{x - a} = \frac{-x^2 + a^2}{x - a} =$$
$$= \frac{-(x^2 - a^2)}{x - a} = -\frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = -(x + a) \text{ si } x - a \neq 0., \text{ esto es si } x \neq a$$

Así:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} [-(x + a)] = -2a.$$

Hemos demostrado por lo tanto que, en todo punto $[a, f(a)] = (a, 4 - a^2)$ la función es derivable y su derivada es $f'(a) = -2a$.

Concluimos con esto que $f'(x) = -2x$ para $x \in \mathbb{R}$.

Usando este resultado, tenemos que

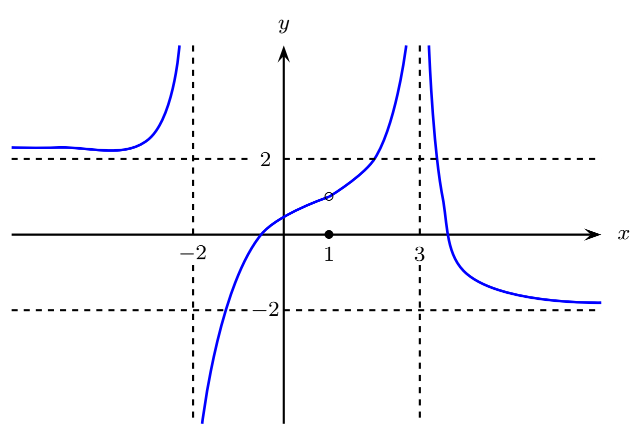
$$f'(-2) = 4;$$
$$f'(1) = -2.$$

□

(2) Graficar una función $f(x)$ continua en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, 1), (1, 3), (3, +\infty)$, que cumpla las siguientes condiciones:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$; $f(1) = 0$;
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$; $f(x)$ tiene discontinuidad removible en $x = 1$.
$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$;

▼ Una gráfica que cumple las anteriores condiciones es:



□

(3) Sea

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9,$$

explique y demuestre que hay, al menos, un número a entre 0 & 10 tal que $f(a) = 500$.

▼ Calculamos

$$f(0) = -9;$$
$$f(10) = 10^3 - 5 \times 10^2 + 7 \times 10 - 9 = 1000 - 500 + 70 - 9 = 561.$$

Puesto que $f(x)$ es una función polinomial, entonces es continua y, por el teorema de Valor Intermedio, se sabe que toma todos los valores del intervalo $[-9, 561]$ cuando la variable x recorre el intervalo $[0, 10]$. En particular, $500 \in (-9, 561)$; entonces existe $a \in (0, 10)$, tal que $f(a) = 500$.

□

(4) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2 - 6x + 8} & \text{si } x \neq 2 \text{ y } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 2\,; \end{cases}$$

determinar para la función g:

(a) Dominio y raíces

▼

Dominio: $D_g = \mathbb{R} - \{\,4\,\}$.

Raíces: nos damos cuenta de que, para $x \neq 2$

$$\frac{x-2}{x^2-6x+8} = \frac{x-2}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{x-4}\,,$$

con lo cual concluimos que la función no tiene raíces.

□

(b) Intervalos de continuidad y clasificación de discontinuidades

▼ La función no es continua en $x = 2$, ya que

$$g(2) = 1;$$

y que

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{2}\,.$$

Aquí $g(x)$ tiene una discontinuidad removible.

La función tampoco es continua en $x = 4$, ya que $g(4)$ no existe pues $(4 \notin D_g)$.

Aún más:

Si x está a la derecha de 4,

$$x > 4 \Rightarrow x - 4 > 0;$$
$$\lim_{x \to 4^+} g(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty.$$

Si x está a la izquierda de 4,

$$x < 4 \Rightarrow x - 4 < 0;$$
$$\lim_{x \to 4^-} g(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty.$$

Por lo que $g(x)$ tiene una discontinuidad esencial infinita en $x = 4$.

Entonces, $g(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{\,2, 4\,\} = (-\infty, 2) \bigcup (2, 4) \bigcup (4, +\infty)$.

□

(c) Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales

▼ Por lo anterior se ve que $x = 4$ es una asíntota vertical.
Si calculamos

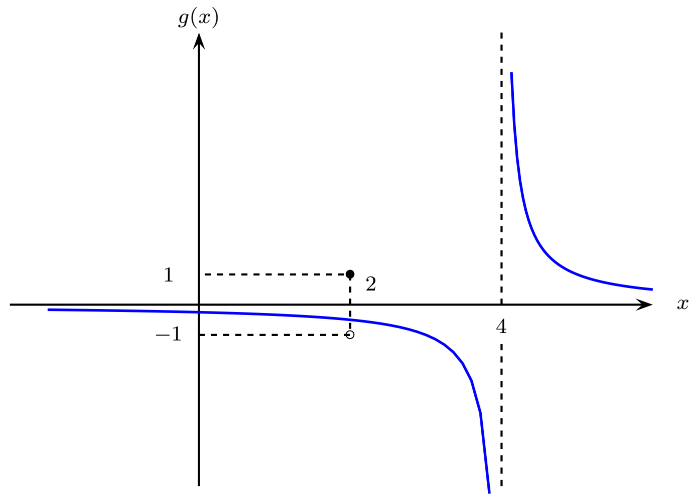
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-4} = 0,$$

vemos que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

□

(d) Bosquejo gráfico

▼ Su gráfica es:



□

(5) Determinar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \notin [-2,2] \\ ax^2+bx & \text{si } x \in [-2,2] \end{cases}$$

sea continua en todos los reales.

▼ La función $h(x)$ es continua en todos los reales excepto posiblemente en $x = -2$ & $x = 2$.
Para que la función sea continua en $x = -2$ se debe cumplir

$$\lim_{x\to -2} h(x) = h(-2),$$

por lo que

$$\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^+} h(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to -2^-} (2x+1) = \lim_{x\to -2^+} (ax^2+bx) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4+1 = 4a-2b,$$

o sea,

$$4a - 2b = -3;$$

y para que sea continua en $x = 2$,

$$\lim_{x\to 2} h(x) = h(2),$$

por lo que

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^+} h(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} (ax^2 + bx) = \lim_{x\to 2^+} (2x+1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4a + 2b = 4 + 1,$$

o sea,

$$4a + 2b = 5\,.$$

Así, para que $h(x)$ tenga límite en $x = -2$ y en $x = 2$, se deben cumplir las condiciones

$$4a - 2b = -3\,;$$
$$4a + 2b = 5\,.$$

Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sumando las ecuaciones se tiene

$$8a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}\ .$$

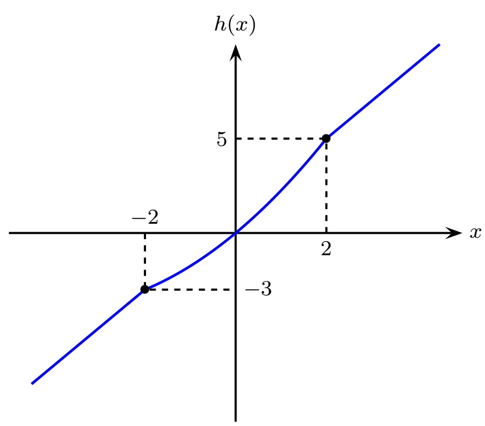
Sustituyendo este valor en la primera ecuación, tenemos

$$4\left(\frac{1}{4}\right) - 2b = 1 - 2b = -3 \Rightarrow 2b = 1 + 3 = 4 \Rightarrow b = 2\,.$$

Con estos valores a, b la función que resulta es

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{4}x^2 + 2x & \text{si } x \ \in \ [-2, 2] \\ 2x+1 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$$

cuya gráfica es



Por la forma en que ha sido construida la gráfica sí cumple

$$\lim_{x\to -2} h(x) = -3 \ \& \ \lim_{x\to 2} h(x) = 5\,.$$

Además,

$$h(-2) = \frac{1}{4}(-2)^2 + 2(-2) = 1 - 4 = -3 \ \& \ \lim_{x\to -2} h(x) = h(-2) \Rightarrow h, \text{ por lo que es continua en } x = -2\ ;$$
$$h(2) = \frac{1}{4}(2)^2 + 2(2) = 1 + 4 = 5 \ \& \ \lim_{x\to 2} h(x) = h(2) \Rightarrow h, \text{ con lo cual es continua en } x = 2\ .$$

$\square$