CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E1000

(1) Sea $f(x)$ una función cuya derivada es

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{(3 + 2x)\sqrt{50 + 6x}}$$

y con dominio igual al de su derivada. Determine los intervalos de monotonía de $f(x)$ y sus puntos extremos.

(2) Una lámpara se encuentra suspendida a 15 pies sobre una calle horizontal y recta. Si un hombre de 6 pies de estatura camina alejándose de la lámpara con una velocidad de 5 pies/s en línea recta, ¿con qué rapidez se alarga su sombra?

(3) Encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto $P(1, 1)$ de la Lemniscata de Bernoulli

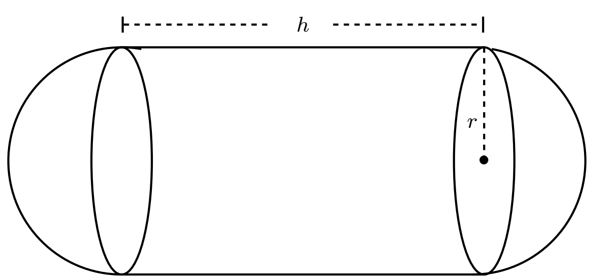
$$(x^2 + y^2)^2 = 4xy.$$

(4) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}\,.$$

Diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, determine los puntos de inflexión y grafique.

(5) Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pies^3?



canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

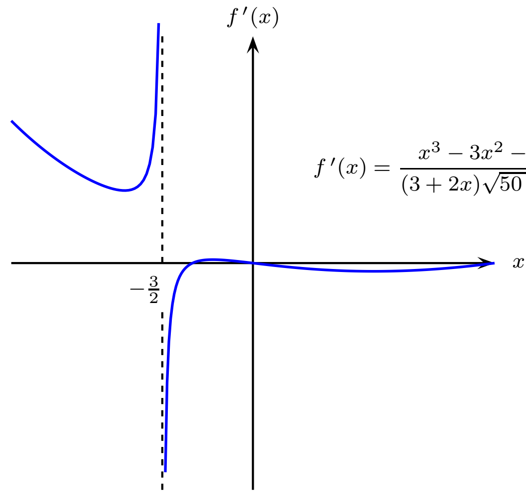
Respuestas

(1) Sea $f(x)$ una función cuya derivada es

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{(3 + 2x)\sqrt{50 + 6x}}$$

y con dominio igual al de su derivada. Determine los intervalos de monotonía de $f(x)$ y sus puntos extremos.

▼



Para determinar el dominio de f' observemos que

$$50 + 6x > 0 \Leftrightarrow 6x > -50 \Leftrightarrow x > -\frac{50}{6} = -\frac{25}{3}$$

y también que

$$3 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2};$$

luego entonces,

$$D_f = D_{f'} = \left(-\frac{25}{3}, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) = \left(-\frac{25}{3}, +\infty\right) - \left\{-\frac{3}{2}\right\}.$$

Por otra parte

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x + 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0 \ \& \ 4.$$

Veamos el signo de f' en los distintos intervalos, tomando en cuenta que $\sqrt{50 + 6x} > 0$ siempre.

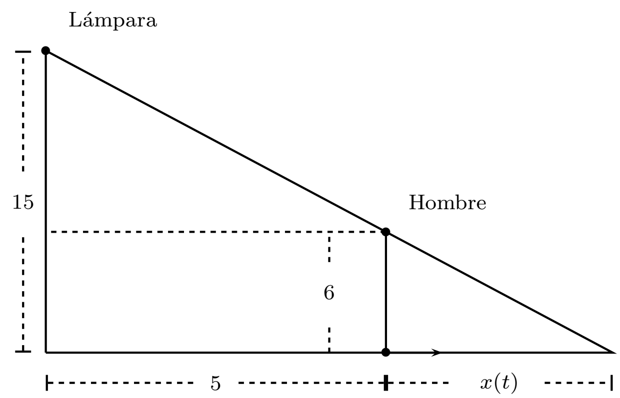
	Signo de					
Intervalo	$3 + 2x$	$x + 1$	x	$x - 4$	$f'(x)$	$f(x)$ es
$-\frac{25}{3} < x < -\frac{3}{2}(< -1 < 0 < 4)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	creciente
$\left(-\frac{25}{3} <\right) -\frac{3}{2} < x < -1(< 0 < 4)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente
$\left(-\frac{25}{3} < -\frac{3}{2} <\right) -1 < x < 0(< 4)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	creciente
$\left(-\frac{25}{3} < -\frac{3}{2} < -1\right) < 0 < x < 4$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$\left(-\frac{25}{3} < -\frac{3}{2} < -1 < 0 <\right) 4 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente

Luego los puntos extremos $x = -1$, $x = 0$ & $x = 4$ es donde $f(x)$ tiene, respectivamente, mínimo relativo pues f pasa de ser decreciente a ser creciente, máximo relativo pues f pasa de ser creciente a ser decreciente y mínimo relativo pues f nuevamente pasa de ser decreciente a ser creciente.

□

(2) Una lámpara se encuentra suspendida a 15 pies sobre una calle horizontal y recta. Si un hombre de 6 pies de estatura camina alejándose de la lámpara con una velocidad de 5 pies/s en línea recta, ¿con qué rapidez se alarga su sombra?

▼ Usamos la figura



Por la semejanza de los triángulos rectángulos con un ángulo agudo común, tenemos, considerando que el espacio recorrido por el hombre después de t segundos es $5t$ pies y que la longitud de la sombra es $x(t)$:

$$\frac{6}{15} = \frac{x(t)}{5t + x(t)} \Rightarrow 6x(t) + 30t = 15x(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{10}{3}t \Rightarrow x'(t) = \frac{10}{3}\,.$$

La sombra está creciendo a una velocidad de $\dfrac{10}{3}$ pie/seg.

□

(3) Encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto $P(1, 1)$ de la Lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = 4xy.$$

▼ Efectivamente el punto $P(1, 1)$ está sobre la Lemniscata, pues sus coordenadas la satisfacen:

$$(1^2 + 1^2)^2 = 4 \times 1 \times 1.$$

Calculemos la pendiente de la recta tangente derivando, en este caso implícitamente con respecto a x:

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 4y + 4xy'.$$

Trasponiendo términos, para despejar y'

$$4y(x^2 + y^2)y' - 4xy' = 4y - 4x(x^2 + y^2).$$

Dividamos toda la ecuación entre 4 y factoricemos y':

$$[y(x^2 + y^2) - x]y' = y - x(x^2 + y^2).$$

Por lo que:

$$y' = \frac{y - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2) - x}.$$

Y en el punto $P(1, 1)$, la pendiente será:

$$y'(1, 1) = \frac{1 - 1(1^2 + 1^2)}{1(1^2 + 1^2) - 1} = \frac{1 - 1(1 + 1)}{1(1 + 1) - 1} = \frac{1 - 1 \times 2}{1 \times 2 - 1} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

□

(4) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}\,.$$

Diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, determine los puntos de inflexión y grafique.

▼ Calculemos primero la primera y la segunda derivada

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)2x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2x(x^2 + 1) - 4x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}\,.$$

Luego, los puntos de inflexión se encuentran cuando

$$2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \& \ x = \pm\sqrt{3}\,.$$

El signo de la segunda derivada nos lo da esta misma expresión, pues el denominador $(x^2 + 1)^3$ siempre es positivo.

Determinemos el signo de la segunda derivada pues:

	Signo de				
Intervalo	$x + \sqrt{3}$	x	$x - \sqrt{3}$	$f''(x)$	$f(x)$ es cóncava hacia
$x < -\sqrt{3}(< 0 < \sqrt{3})$	$-$	$-$	$-$	$-$	abajo
$-\sqrt{3} < x < 0(< \sqrt{3})$	$+$	$-$	$-$	$+$	arriba
$(-\sqrt{3} <)0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$-$	$-$	abajo
$(-\sqrt{3} < 0 <)\sqrt{3} < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	arriba

Habida cuenta que $2x(x^2 - 3) = 2x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ y su signo nos lo da $x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.
Además:
$D_f = \mathbb{R}$; la única raíz de f es $x = 0$ & f es impar.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0, \text{ por lo que } y = 0 \text{ es asíntota horizontal.}$$

Los puntos críticos de f son $x = \pm 1$ cuando $f'(x) = 0$.

El signo de $f'(x)$ nos lo da $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$, luego:

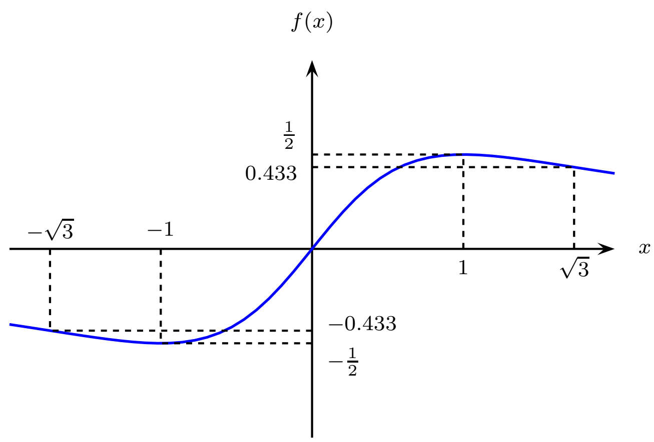
	Signo de			
Intervalo	$1 + x$	$1 - x$	$f'(x)$	$f(x)$ es
$x < -1 (< 1)$	$-$	$+$	$-$	decreciente
$-1 < x < 1$	$+$	$+$	$+$	creciente
$(-1 <) 1 < x$	$+$	$-$	$-$	decreciente

En $x = 1$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ hay un máximo relativo pues f pasa de ser creciente a ser decreciente.

En $x = -1$, $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$ hay un mínimo relativo pues f pasa de ser decreciente a ser creciente.

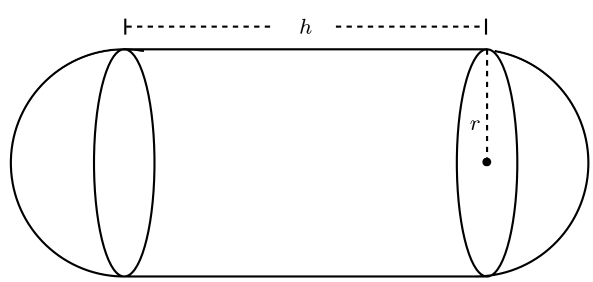
$f(\pm\sqrt{3}) = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{4} \approx \pm 0.4330127$ así como $f(0) = 0$ son las ordenadas de los puntos de inflexión.

Y con toda esta información la gráfica de f es:



□

(5) Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pies^3?



▼

El volumen del tanque es el volumen del cilindro, más el volumen de una esfera:

(i) $$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10\pi.$$

El área total del tanque es el área lateral del cilindro, más el área de una esfera:

$$A = 2\pi r h + 4\pi r^2.$$

Si α por pie^2 es el costo del material de la parte cilíndrica, se tiene que el costo total es:

(ii) $$C = 2\pi r h \times \alpha + 4\pi r^2 (2\alpha) \Rightarrow C = 2\alpha\pi (rh + 4r^2).$$

Ésta es la función que deseamos minimizar. Tiene dos variables r, h. Usamos (i) para encontrar una relación entre estas variables.

(iii) $$r^2 h + \frac{4}{3} r^3 = 10 \Rightarrow r^2 h = 10 - \frac{4}{3} r^3 \Rightarrow h = \frac{10}{r^2} - \frac{4}{3} r.$$

Sustituimos este valor en (ii):

$$C = 2\alpha\pi \left[r \left(\frac{10}{r^2} - \frac{4}{3} r \right) + 4r^2 \right] = 2\alpha\pi \left(10\frac{1}{r} - \frac{4}{3} r^2 + 4r^2 \right) = 2\alpha\pi \left(10\frac{1}{r} + \frac{8}{3} r^2 \right).$$

Calculamos primera y segunda derivada

$$C' = 2\alpha\pi \left(-10\frac{1}{r^2} + \frac{16}{3} r \right) = 2\alpha\pi \left(\frac{-30 + 16r^3}{3r^2} \right)$$

$$C'' = 2\alpha\pi \left(10\frac{2}{r^3} + \frac{16}{3} \right) > 0.$$

Calculamos puntos críticos

$$C' = 0 \Rightarrow -30 + 16r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{8}} \approx 1.23311.$$

Usando (iii):

$$h = \frac{10}{(1.23311)^2} - \frac{4}{3}(1.23311) \approx 4.93238.$$

□