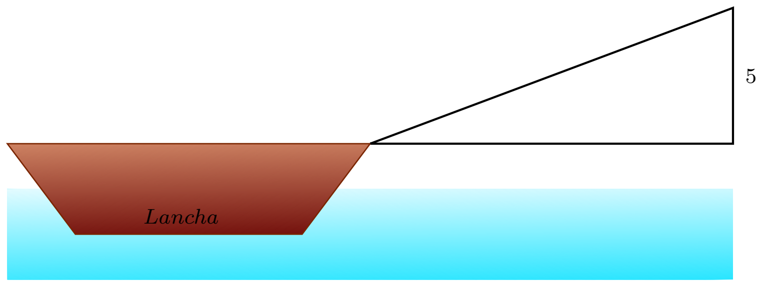
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E1100

(1) Dada la siguiente función:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2},$$

determine los intervalos de monotonía de $f(x)$, los puntos extremos y grafique esa función.

(2) Una lancha es jalada desde un dique de 5 metros de alto. Si cuando está a 3 metros del dique es jalada a 1 m/s ¿A qué velocidad va la lancha en ese momento?



(3) Encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto $P(2, \sqrt{2})$ del óvalo de Cassini.

$$(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 = 36.$$

(4) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2},$$

diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y determine los puntos de inflexión.

(5) Una central eléctrica está ubicada en la orilla de un río rectilíneo de 1.5 km. de ancho. En la orilla opuesta está situada una fábrica, L kilómetros río abajo del punto A que está directamente enfrente de la central eléctrica. La distancia entre la fábrica y la central es de 5 km. ¿Cuál es la ruta más económica para tender un cable que conecte la central con la fábrica si el costo por kilómetro de cable bajo el agua es el cuádruple del costo sobre tierra?

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

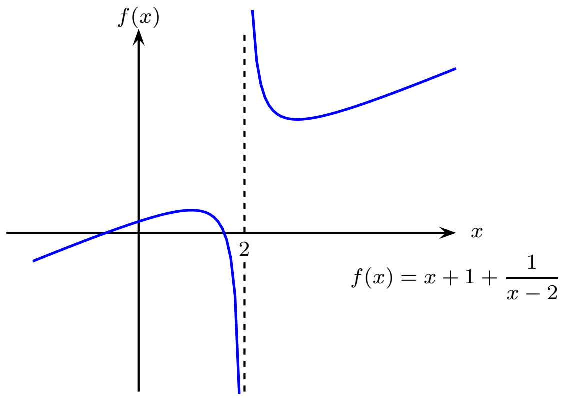
Respuestas

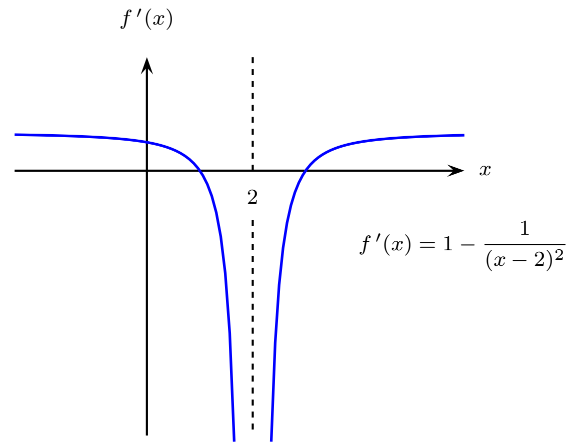
(1) Dada la siguiente función:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2},$$

determine los intervalos de monotonía de $f(x)$, los puntos extremos y grafique esa función.

▼





$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} < 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 1 \Leftrightarrow |\,x-2\,| > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 2 > 1 \text{ o bien } x - 2 < -1 \Leftrightarrow x > 3 \text{ o bien } x < 1.$$

Luego, $f(x)$ es creciente en

$$(-\infty, 1) \text{ y en } (3, +\infty)$$

y decreciente en

$$(1, 2) \text{ y en } (2, 3).$$

(Note que $x \notin D_f$).
Los puntos críticos aparecen cuando

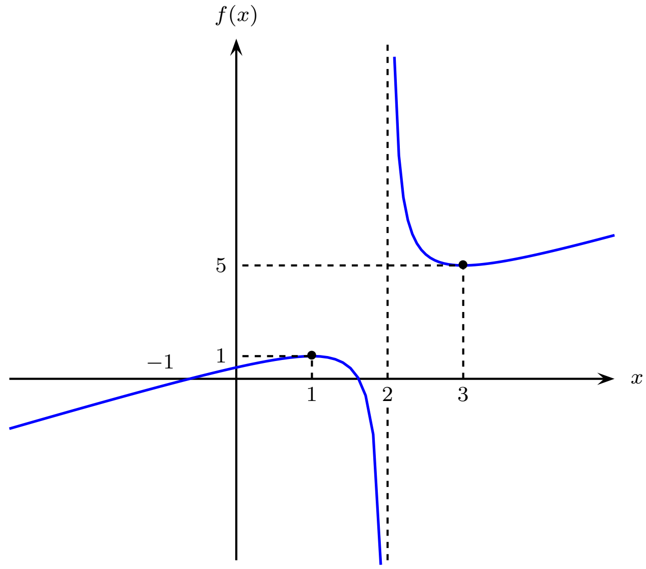
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\,x-2\,| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o bien } x = 3.$$

Como en $x = 1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, en el punto $[1, f(1)] = \left(1, 1 + 1 + \frac{1}{1-2}\right) = (1, 1)$ la función tiene un máximo relativo.
Y en $x = 3$, un mínimo relativo pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente; el máximo es $f(3) = 3 + 1 + \frac{1}{3-2} = 5$.
También tenemos que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y que $\lim\limits_{x \to 2^{\mp}} f(x) = \mp\infty$.

Además

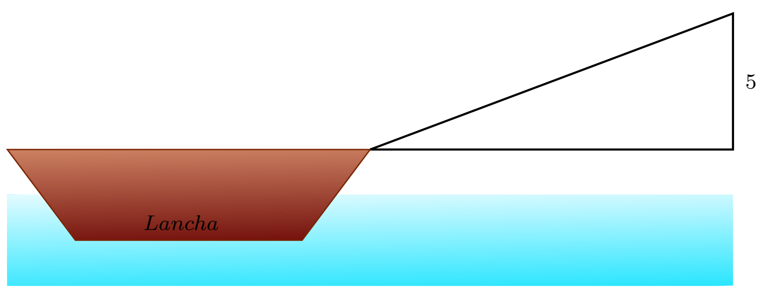
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 1}{x - 2} = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \approx \begin{cases} 1.6 \\ -0.6 \end{cases} \quad \text{son las raíces.}$$

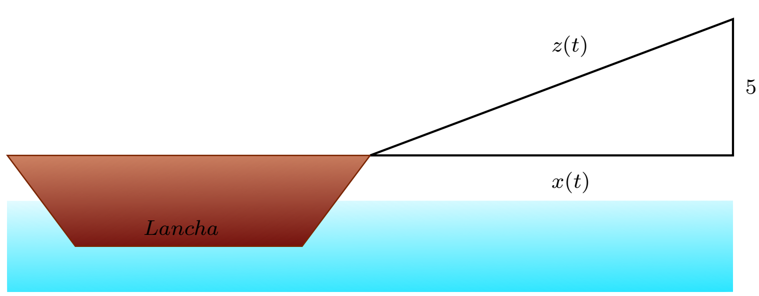


$\square$

(2) Una lancha es jalada desde un dique de 5 metros de alto. Si cuando está a 3 metros del dique es jalada a 1 m/s ¿A qué velocidad va la lancha en ese momento?



▼ Usamos la figura siguiente:



Debemos calcular $\dfrac{dx(t)}{dt}$ cuando $x = 3$ m y cuando $\dfrac{dz(t)}{dt} = 1$ m/s.

Tenemos, por el teorema de Pitágoras

$$z^2(t) = x^2(t) + 5^2 = x^2(t) + 25.$$

Derivando implícitamente con respecto a t tenemos

$$2z(t)\frac{dz(t)}{dt} = 2x(t)\frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{z(t)}{x(t)}\,\frac{dz(t)}{dt}\,.$$

Cuando $x = 3$ m tenemos que $z^2 = 9 + 25 \Rightarrow z = \sqrt{34}$, por lo que

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\sqrt{34}}{3}1 \text{ m/seg } = \frac{\sqrt{34}}{3} \text{ m/s.}$$

□

(3) Encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto $P(2, \sqrt{2})$ del óvalo de Cassini.

$$(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 = 36.$$

▼ Comprobamos que el punto P pertenece al óvalo de Cassini sustituyendo en lugar de $x = 2$ y en lugar de $y = \sqrt{2}$ y viendo que la ecuación se transforma en una identidad:

$$[2^2 + (\sqrt{2})^2 + 4]^2 - 16(2)^2 = 36 \Rightarrow 100 - 16 \times 4 = 36.$$

Y una vez hecho esto calculemos la pendiente de la recta tangente derivando implícitamente la ecuación con respecto a x

$$2(x^2 + y^2 + 4)(2x + 2yy') - 32x = 0.$$

Trasponiendo términos

$$4yy'(x^2 + y^2 + 4) = 32x - 4x(x^2 + y^2 + 4)$$

y despejando $y' = \dfrac{32x - 4x(x^2 + y^2 + 4)}{4y(x^2 + y^2 + 4)} = \dfrac{8x - x(x^2 + y^2 + 4)}{y(x^2 + y^2 + 4)}$.

Por lo que la pendiente de la recta tangente en el punto $P(2, \sqrt{2})$ es

$$y'(2, \sqrt{2}) = \frac{8 \times 2 - 2[2^2 + (\sqrt{2})^2 + 4]}{\sqrt{2}[2^2 + (\sqrt{2})^2 + 4]} = \frac{16 - 2(4 + 2 + 4)}{\sqrt{2}(4 + 2 + 4)} = \frac{16 - 2 \times 10}{\sqrt{2}(10)} =$$
$$= \frac{16 - 20}{10\sqrt{2}} = \frac{-4}{10\sqrt{2}} = -\frac{2}{5\sqrt{2}}\,.$$

□

(4) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{(1 + x)^2}\,,$$

diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y determine los puntos de inflexión.

▼

Calculemos la segunda derivada de f

$$f'(x) = \frac{(1 + x)^2 - 2(1 + x)x}{(1 + x)^4} = \frac{1 + x - 2x}{(1 + x)^3} = \frac{1 - x}{(1 + x)^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-(1 + x)^3 - 3(1 + x)^2(1 - x)}{(1 + x)^6} = \frac{-1 - x - 3 + 3x}{(1 + x)^4} = \frac{2x - 4}{(1 + x)^4}\,.$$

El signo de esta segunda derivada nos lo da el numerador $2x-4$ pues el denominador es siempre positivo, luego

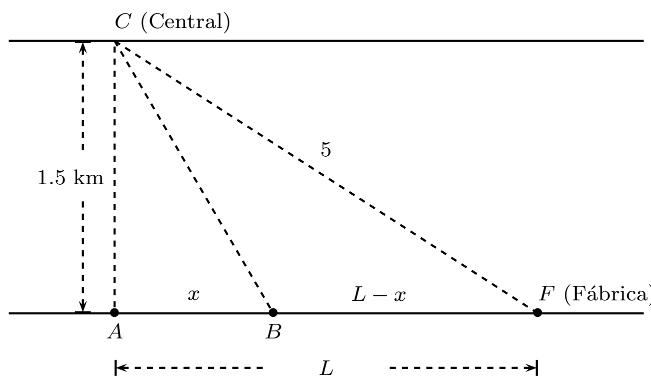
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x-4>0 \Leftrightarrow 2x>4 \Leftrightarrow x>\frac{4}{2}=2.$$

Entonces, la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(2,+\infty)$.
Y cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,2)$, pues $-1 \notin D_f$.
Para $x=2$ se tiene un punto de inflexión, pues ahí la gráfica de f cambia el sentido de la concavidad.
El punto de inflexión es $[2, f(2)] = \left(2, \dfrac{2}{9}\right)$.

□

(5) Una central eléctrica está ubicada en la orilla de un río rectilíneo de 1.5 km. de ancho. En la orilla opuesta está situada una fábrica, L kilómetros río abajo del punto A que está directamente enfrente de la central eléctrica. La distancia entre la fábrica y la central es de 5 km. ¿Cuál es la ruta más económica para tender un cable que conecte la central con la fábrica si el costo por kilómetro de cable bajo el agua es el cuádruple del costo sobre tierra?

▼ Usamos la figura siguiente:



$$L = \sqrt{5^2-(1.5)^2} = \sqrt{25-2.25} = \sqrt{22.75} \approx 4.769696.$$

Hallemos x de manera que el costo sea mínimo.
$BC = \sqrt{(1.5)^2+x^2}$ y el costo será $4c\sqrt{(1.5)^2+x^2}$ si c es el costo de tender un kilómetro de cable sobre tierra.
Luego el costo de tender el cable uniendo C con B y B con F es

$$f(x) = 4c\sqrt{(1.5)^2+x^2} + c(L-x).$$

Para minimizar esta función calculemos la derivada y dónde se anula

$$f'(x) = 2c[(1.5)^2+x^2]^{-1/2} \times 2x - c = \frac{4cx - c\sqrt{(1.5)^2+x^2}}{\sqrt{(1.5)^2+x^2}};$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4cx - c\sqrt{(1.5)^2+x^2} = 0 \Leftrightarrow c(4x-\sqrt{(1.5)^2+x^2}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x = \sqrt{(1.5)^2+x^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16x^2 = (1.5)^2 + x^2 \Leftrightarrow 15x^2 = (1.5)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{(1.5)^2}{(1.5)\times 10} = \frac{1.5}{10} = 0.15 \Leftrightarrow x = \sqrt{0.15}\,.$$

Naturalmente el dominio de $f(x)$ es el intervalo $[0, L]$.

El costo de tender el cable para $x = 0$, es decir, en forma recta de C a A y de A a la fábrica es

$$1.5 \times 4c + Lc = (6 + L)c.$$

Si $x = L$, el costo sería $20c$, mayor que para $x = 0$, si lo tendiéramos sólo por agua, en línea recta desde la central a la fábrica.

Si $x = \sqrt{0.15}$, el costo sería:

$$4c\sqrt{(1.5)^2 + 0.15} + (L - \sqrt{0.15})c = c(4\sqrt{(1.5)^2 + 0.15} + L - \sqrt{0.15}).$$

Y como

$$4\sqrt{(1.5)^2 + 0.15} - \sqrt{0.15} \approx 5.809475 < 6,$$

éste es el costo menor pues

$$c(4\sqrt{(1.5)^2 + 0.15} - \sqrt{0.15} + L) < c(6 + L).$$

□