CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E1200

(1) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$2x^3 + 2y^3 = 9xy$$

en el punto $(2, 1)$.

(2) Si $f(x) = (x - a)g(x)$ donde $g(x)$ es continua en a pero no derivable, halle $f'(a)$.

(3) Sean $\Phi(s) = \sqrt{1 - \psi(s)}$, $\psi(-2) = -3$ & $\psi'(-2) = 3$, calcule $\Phi'(-2)$.

(4) Sea

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

Encontrar:

(a) Los puntos críticos y clasificarlos.
(b) Los puntos de inflexión.
(c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
(d) Intervalos de concavidad y de convexidad.
(e) La gráfica de $f(x)$.

(5) Determine el volumen máximo posible de un cilindro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo las dos bases circulares, es de 150π m^2.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$2x^3 + 2y^3 = 9xy$$

en el punto $(2, 1)$.

▼ Efectivamente, el punto pertenece a la gráfica pues sus coordenadas $x = 2$, $y = 1$ satisfacen a la ecuación

$$2 \times 2^3 + 2 \times 1^3 = 2 \times 8 + 2 \times 1 = 9(2)1 \Rightarrow 16 + 2 = 18.$$

Si suponemos que y es función de x, la pendiente de la tangente es la derivada de y, la cual podemos calcular derivando implícitamente la ecuación con respecto a x,

$$\begin{aligned} 6x^2 + 6y^2y' &= 9y + 9xy' \Rightarrow \\ \Rightarrow (6y^2 - 9x)y' &= 9y - 6x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y' &= \frac{9y - 6x^2}{6y^2 - 9x}\,, \end{aligned}$$

fuera de la parábola $6y^2 - 9x = 0$ donde no está el punto $(2, 1)$, pues $6 \times 1^2 - 9 \times 2 = 6 - 18 \neq 0$.
La pendiente de la recta tangente en el punto $x = 2$ y $y = 1$ será entonces

$$y'(2, 1) = \frac{9 \times 1 - 6 \times 2^2}{6 \times 1^2 - 9 \times 2} = \frac{9 - 24}{6 - 18} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}\,;$$

y la ecuación de la tangente será entonces

$$y - 1 = \frac{5}{4}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} + 1 \Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}\,.$$

□

(2) Si $f(x) = (x - a)g(x)$ donde $g(x)$ es continua en a pero no derivable, halle $f'(a)$.
▼

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)g(x) - 0}{x - a} = \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

La primera igualdad es la definición de la derivada de una función $f(x)$ en un punto a.
La segunda es por definición de $f(x)$ y operando se obtiene la tercera.
La última igualdad es por la definición de continuidad de una función $g(x)$ en un punto a.

□

(3) Sean $\Phi(s) = \sqrt{1 - \psi(s)}$, $\psi(-2) = -3$ & $\psi'(-2) = 3$, calcule $\Phi'(-2)$.

▼
Tenemos que

$$\Phi(s) = [1 - \psi(s)]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Luego, por la regla para derivar una función potencia y la regla de la cadena, tenemos que

$$\Phi'(s) = \frac{-\psi'(s)}{2\,[1 - \psi(s)]^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Por lo que

$$\Phi'(-2) = \frac{-\psi'(-2)}{2\,[1-\psi(-2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-3}{2\sqrt{1-(-3)}} =$$
$$= \frac{-3}{2\sqrt{4}} = \frac{-3}{2\times 2} = -\frac{3}{4}\,.$$

$\square$

(4) Sea la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}\,.$$

Encontrar:

(a) Los puntos críticos y clasificarlos

▼

Como la función es derivable en toda la recta, los puntos críticos serán aquellos donde la derivada vale 0, esto es, aquellos donde

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0;$$

o sea, cuando

$$1-x^2 = 0 \Rightarrow |\,x\,| = \sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1.$$

Calculamos la segunda derivada para discernir si son máximos o mínimos relativos:

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} =$$
$$= \frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1++x^2)^3} = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}\,;$$
$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}\begin{cases} <0 \\ >0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} x=1; \\ x=-1; \end{cases}$$

Por lo que en

$$[1, f(1)] = \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ hay un máximo relativo}$$
$$\text{y en } [-1, f(-1)] = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \text{ hay un mínimo relativo;}$$

todo lo cual es consistente con el hecho de que $f(x)$ sea impar.

$\square$

(b) Los puntos de inflexión

▼

Vemos que $f''(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}\,.$$

Además digamos, por ejemplo, que

$$\begin{array}{rll} f''(-2)<0, & \text{luego en } (-\infty,-\sqrt{3}), & f''(x)<0; \\ f''(-1)>0, & \text{luego en } (-\sqrt{3},0), & f''(x)>0; \\ f''(1)<0, & \text{luego en } (0,\sqrt{3}), & f''(x)<0; \\ f''(2)>0, & \text{luego en } (\sqrt{3},\infty), & f''(x)>0; \end{array}$$

ya que $-2 \in (-\infty, -\sqrt{3})$, $-1 \in (-\sqrt{3}, 0)$, $1 \in (0, \sqrt{3})$ y que $2 \in (\sqrt{3}, \infty)$.
En $\left[\pm\sqrt{3}, f(\pm\sqrt{3})\right] = \left(\pm\sqrt{3}, \dfrac{\pm\sqrt{3}}{4}\right)$ y en $(0, 0)$ hay puntos de inflexión.

$\square$

(c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

▼

Análogamente la función $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y también

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Seleccionando puntos arbitrarios en $(-\infty, -1)$,$(-1, 1)$ y en $(1, +\infty)$ tenemos que

$$\begin{array}{rl} f'(-2) < 0, & \text{luego} f'(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -1); \\ f'(0) > 0, & \text{luego} f'(x) > 0 \text{ en } (-1, 1); \\ f'(2) < 0, & \text{luego} f'(x) < 0 \text{ en } (1, \infty). \end{array}$$

por lo que $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$, creciente en $(-1, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$.

$\square$

(d) Intervalos de concavidad y de convexidad

▼

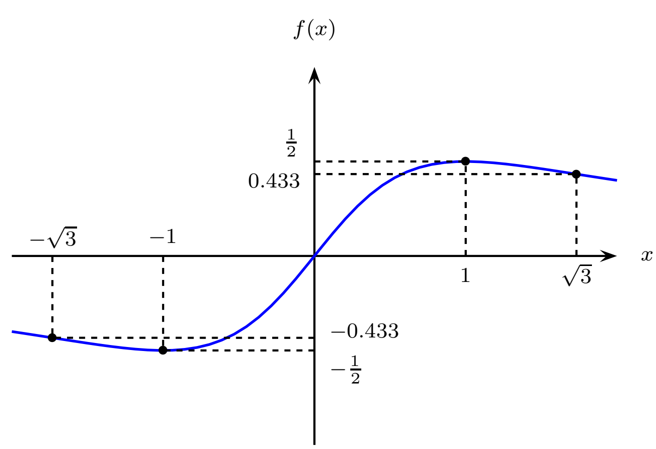
Exprimiendo los resultados obtenidos en b) tenemos que:
La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y en $(0, \sqrt{3})$.
Es cóncava hacia arriba en $(-\sqrt{3}, 0)$ y en $(\sqrt{3}, \infty)$.

$\square$

(e) La gráfica de $f(x)$

▼

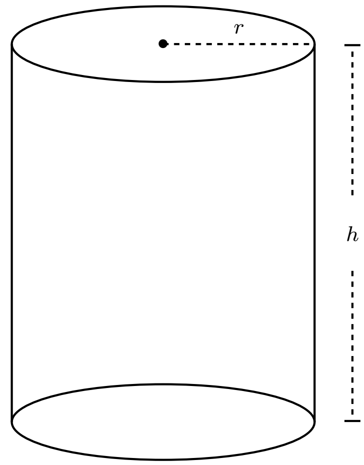
Además de impar notamos que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ y por último tenemos que la función $f(0) = 0$.
La gráfica de $f(x)$ es:



$\square$

(5) Determine el volumen máximo posible de un cilindro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo las dos bases circulares, es de 150π m^2.

▼ Usamos la figura



Sea r el radio de la base del cilindro y h su altura, luego entonces:

$$V = \pi r^2 h \text{ y } A = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 150\pi;$$

por lo que

$$h = \frac{150\pi - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{75 - r^2}{r}.$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del volumen V, lo tendremos expresado como función de una variable única:

$$V(r) = \frac{\pi r^2(75 - r^2)}{r} = 75\pi r - \pi r^3$$

y de aquí

$$V'(r) = 75\pi - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 25 \Leftrightarrow r = 5;$$

y también:

$$h = \frac{75 - 25}{5} = \frac{50}{5} = 10 \text{ y } V = \pi \times 25 \times 10 = 250\pi \text{ m}^3$$

Notamos que

$$V''(r) = -6\pi r < 0,$$

por lo que el valor de $r = 5$ m genera un volumen máximo.

$\square$