CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E1300

(1) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$2x^3 + 2y^3 = 9xy$$

en su punto $(2, 1)$.

(2) Sea la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - 3x^2}{x}}\,,$$

obtener $f'(x)$.

(3) Hallar la derivada de

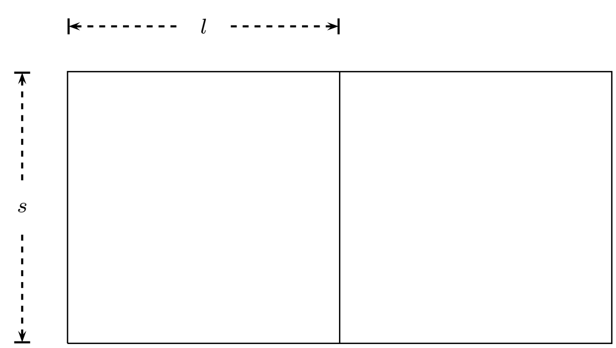
$$f(x) = |\, x\,| + |\, x - 1\,|\,.$$

(4) Para la función

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$$

Determinar:
(a) Dominio y raíces.
(b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) Máximos y mínimos.
(d) Intervalos de concavidad.
(e) Gráfica.
Justificar las respuestas.

(5) Un ranchero quiere bardear dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno de 300 m^2 de área como se muestra en la figura.



¿Cuánto deben medir s y l para que se utilice la mínima cantidad de barda?

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$2x^3 + 2y^3 = 9xy$$

en su punto $(2, 1)$.

▼ Efectivamente el punto $(2, 1)$ está en la curva $2x^3 + 2y^3 = 9xy$, pues sus coordenadas $x = 2$ & $y = 1$ satisfacen la ecuación $2x^3 + 2y^3 = 9xy$:

$$2 \times 2^3 + 2 \times 1^3 = 9 \times 2 \times 1 \Rightarrow 2 \times 8 + 2 \times 1 = 18 \Rightarrow 16 + 2 = 18.$$

Ahora bien, si suponemos que y es función x, su derivada la podemos calcular usando derivación implícita. Derivamos con respecto a x,

$$\begin{aligned} 6x^2 + 6y^2y' &= 9y + 9xy' \Rightarrow \\ \Rightarrow (6y^2 - 9x)y' &= 9y - 6x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y' &= \frac{9y - 6x^2}{6y^2 - 9x}. \end{aligned}$$

En cualquier punto donde $6y^2 - 9x \neq 0$, en particular en el $(2, 1)$, pues para $x = 2$, $y = 1$:

$$6 \times 1^2 - 9 \times 2 = 6 - 18 = -12 \neq 0.$$

La pendiente de la recta tangente en el punto $(2, 1)$ será entonces

$$y'(2, 1) = \frac{9 \times 1 - 6 \times 2^2}{6 \times 1^2 - 9 \times 2} = \frac{9 - 6 \times 4}{6 \times 1 - 18} = \frac{9 - 24}{6 - 18} = \frac{-15}{-12} = \frac{5}{4}.$$

y la ecuación pedida de la recta tangente es entonces

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{5}{4}(x - 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

(2) Sea la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - 3x^2}{x}},$$

obtener $f'(x)$.

▼
Escribimos

$$f(x) = \left(\frac{1 - 3x^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

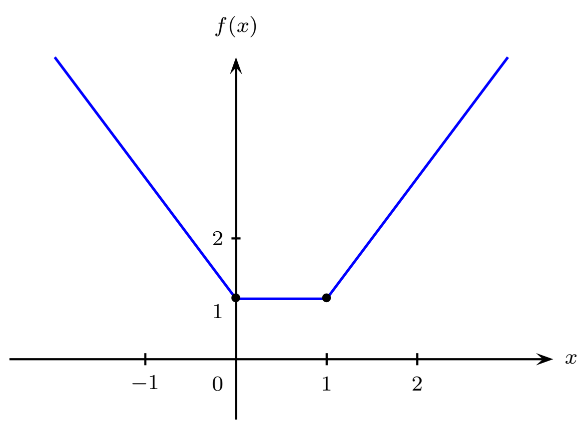
y de aquí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - 3x^2}{x}}} \frac{-6x \times x - (1 - 3x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{1 - 3x^2}} \frac{-6x^2 - 1 + 3x^2}{x^2} = \\ &= \frac{-3x^2 - 1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{1 - 3x^2}} = -\frac{3x^2 + 1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{1 - 3x^2}}. \end{aligned}$$

□

(3) Hallar la derivada de
$$f(x) = |\,x\,| + |\,x - 1\,|\,.$$

▼ Escribimos $f(x)$ sin usar el valor absoluto.
Así si $x \geq 1(> 0)$, $x - 1 \geq 0$ y como $x > 0$, luego entonces, $f(x) = x + x - 1 = 2x - 1$.
Si $0 \leq x < 1$, $x - 1 < 0$, luego entonces, $f(x) = x - (x - 1) = 1$;
y por último, si $x < 0(< 1)$, $x - 1 < 0$, luego entonces, $f(x) = -x - (x - 1) = -2x + 1$.
Tenemos entonces que:
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 0; \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$
Claramente:
La función $f(x)$ es derivable en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y en $(1, \infty)$ y su derivada es, respectivamente, -2, 0 y 2.
Calculemos entonces las derivadas en 0 y en 1 obteniendo las respectivas derivadas laterales:
$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -2 = -2;$$
$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0.$$
Luego $f(x)$ no es derivable en 0 pues $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.
Análogamente:
$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0;$$
$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} 2 = 2.$$
Por lo que tampoco $f(x)$ es derivable en $x = 1$, pues $f'(1^-) \neq f'(1^+)$.
Lo anterior se ve claramente si graficamos la función $f(x)$:



donde se ve que la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ pero derivable en $\mathbb{R} - \{\,0, 1\,\}$.

□

(4) Para la función
$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3,$$

determinar:

(a) Dominio y raíces

▼

Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Raíces:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^5 = \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{3} \text{ o bien } x = 0;$$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}} \approx \pm 1.2909944 \,\&\, x = 0$ son las raíces.

□

(b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

▼

$f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm 1.$

Sean por ejemplo, como valores de prueba $-2 \in (-\infty, -1)$, $-\dfrac{1}{2} \in (-1, 0)$, $\dfrac{1}{2} \in (0, 1)$ & $2 \in (1, +\infty)$;

$$f'(-2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ en } (-\infty, -1) \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, -1);$$
$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ en } (-1, 0) \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (-1, 0);$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ en } (0, 1) \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (0, 1);$$
$$f'(2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ en } (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (1, +\infty).$$

□

(c) Máximos y mínimos

▼

$f''(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$; $f''(-1) < 0 \Rightarrow$ en $\left(-1, \dfrac{2}{15}\right)$ hay un máximo local.

$f''(0) = 0$ pero como en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$ $f(x)$ es decreciente, en $(0, 0)$ no hay valor extremo.

$f''(1) > 0 \Rightarrow$ en $\left(1, -\dfrac{2}{15}\right)$ hay un mínimo local.

□

(d) Intervalos de concavidad

▼

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.7071067.$

Sean, por ejemplo, como valores de prueba:

$$-1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \; -\frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \; \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \;\&\; 1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right).$$

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ en } \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ en } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba en } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right);$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ en } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$f''(1) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right).$$

□

(e) Gráfica de la función $f(x)$

▼

Notemos también que $f(x)$ es impar pues

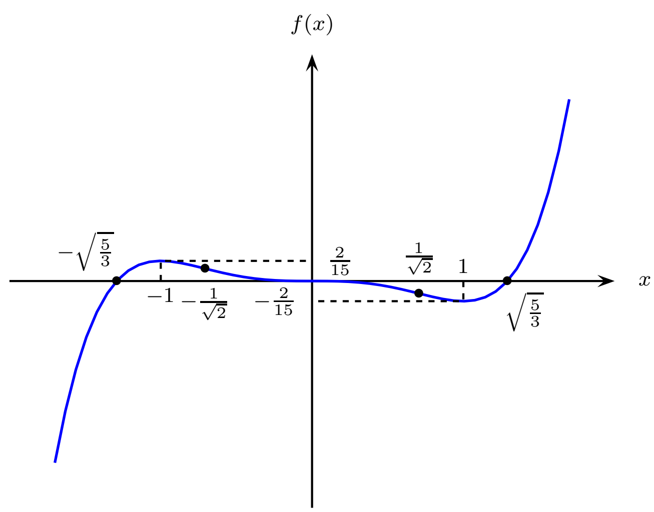
$$f(-x) = \frac{1}{5}(-x)^5 - \frac{1}{3}(-x)^3 = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 = -f(x);$$

esto es, $f(x) = -f(-x)$.

Los puntos de inflexión son $\left[\mp\frac{1}{2^{1/2}}, f\left(\mp\frac{1}{2^{1/2}}\right)\right] = \left(\mp\frac{1}{2^{1/2}}, \mp\frac{1}{5(2)^{5/2}} \pm \frac{1}{3(2)^{3/2}}\right) =$

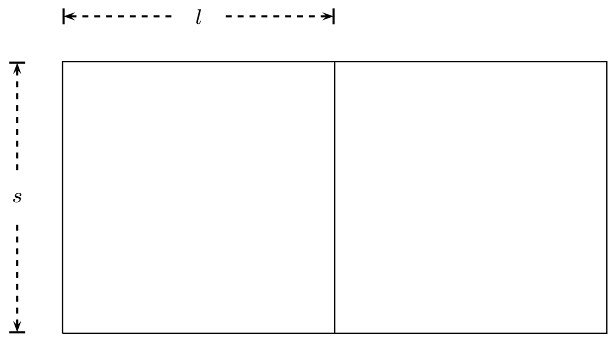
$= \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{6\sqrt{2}} \mp \frac{1}{20\sqrt{2}}\right) = \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pm 10 \mp 3}{60\sqrt{2}}\right) = \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pm 7}{60\sqrt{2}}\right) \approx \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 0.0824957\right)$ y $(0, 0)$.

La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(5) Un ranchero quiere bardear dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno de 300 m^2 de área como se muestra en la figura.



¿Cuánto deben medir s y l para que se utilice la mínima cantidad de barda?

▼
La barda que se quiere construir tiene una longitud de

$$P = 3s + 4l$$

y depende de las variables s y l, que a su vez están relacionadas por $s \times l = 300$; entonces,

$$l = \frac{300}{s};$$

$$P = 3s + 4 \times \frac{300}{s} = 3s + 1200s^{-1},$$

que ahora depende de la única variable s. Además

$$P'(s) = 3 - 1200s^{-2} = 0 \Leftrightarrow s^2 = \frac{1200}{3} = 400 \Leftrightarrow s = 20 \text{ así como } l = \frac{300}{20} = 15.$$

Notamos que $P''(s) = 2400s^{-3} > 0$ para $s > 0$, luego $s = 20$ genera un mínimo de $P(s)$.

□