CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E1400

(1) Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$$

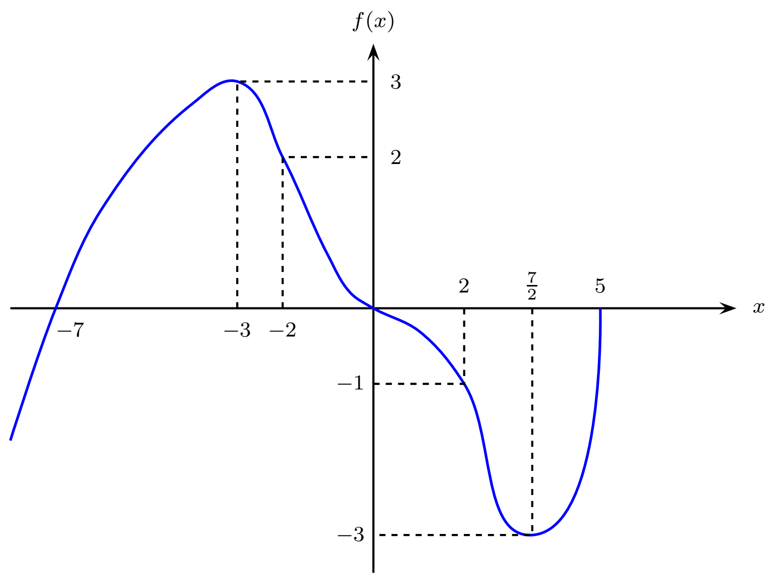
Encontrar:
(a) Dominio, raíces y paridad.
(b) Monotonía, máximos y mínimos locales y absolutos, y el rango.
(c) Concavidad y puntos de inflexión.
(d) Esbozo de la gráfica.

(2) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva

$$\sqrt{5 - y} + xy^2 = 6$$

en el punto $(4, 1)$.

(3) Si la gráfica de $f(x)$ es



Encontrar
(a) Dominio, raíces, paridad y rango.
(b) Monotonía, máximos y mínimos locales y absolutos.
(c) Concavidad y puntos de inflexión.
(d) Intervalos donde $f'(x) > 0$, donde $f'(x) < 0$, donde $f''(x) > 0$ y donde $f''(x) < 0$.
(e) Puntos donde $f'(x) = 0$ e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.

(4) Si se desea construir un bote cilíndrico sin tapa con capacidad de 1 m^3 que requiera la menor cantidad de material para su construcción ¿qué dimensiones debe tener?

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}\,.$$

Encontrar:

(a) Dominio, raíces y paridad

▼

Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{\,0\,\}$ es el dominio.

Para las raíces

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}\,;$$

$f(x)$ es impar pues

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{(-x)^3} = \frac{x^2 - 3}{-x^3} = -\frac{x^2 - 3}{x^3} = -f(x).$$

□

(b) Monotonía, máximos y mínimos locales y absolutos, y el rango

▼

Para discernir dónde es creciente y dónde decreciente, calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x \times x^3 - 3x^2(x^2 - 3)}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 9x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{-x^4 + 9x^2}{x^6} = \frac{-x^2 + 9}{x^4}\,;$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow |\,x\,| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3;$$

por lo que $f(x)$ es creciente en $(-3, 0)$ y en $(0, 3)$ y será decreciente en $(-\infty, -3)$ y en $(3, \infty)$.
$f' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.
Estos puntos críticos serán valores extremos máximos o mínimos dependiendo del valor de la segunda derivada en ellos

$$f''(x) = \frac{x^4(-2x) - (-x^2 + 9)4x^3}{x^8} = \frac{x^3\,(-2x^2 + 4x^2 - 36)}{x^8} =$$

$$= \frac{2x^2 - 36}{x^5}\,.$$

Como $f''(3) = -\dfrac{18}{243} < 0$, en $(3, f(3)) = \left(3, \dfrac{6}{27}\right) = \left(3, \dfrac{2}{9}\right)$, éste es un máximo
y como $f''(-3) = \dfrac{18}{243} > 0$, en $[-3, f(-3)] = \left(-3, -\dfrac{2}{9}\right)$, éste es un mínimo.

□

(c) Concavidad y puntos de inflexión

▼

Como $f(x)$ es impar, sólo consideramos $x > 0$.
Así $f''(x) < 0$ si

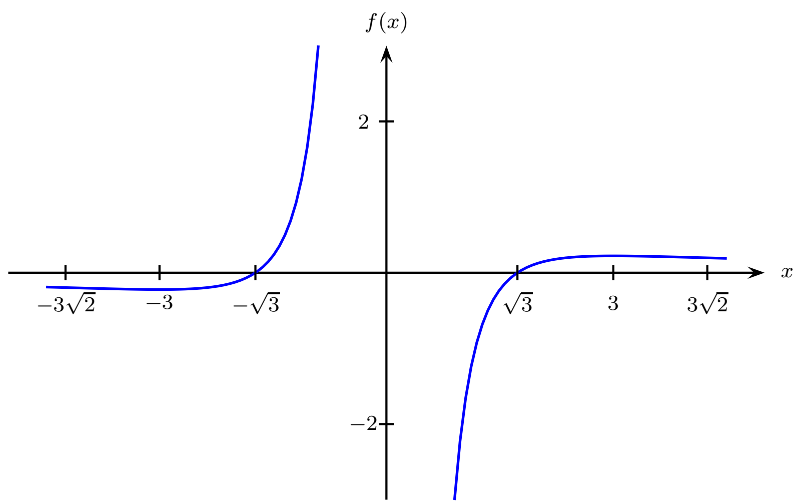
$$2x^2 - 36 < 0 \Rightarrow 2x^2 < 36 \Rightarrow x^2 < 18 \Rightarrow |\,x\,| < 3\sqrt{2}\,.$$

Entonces, para $x > 0$,
la función es cóncava hacia abajo en $\big(0, 3\sqrt{2}\big)$.
Y la función es cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$) en $\big(3\sqrt{2}, +\infty\big)$.

Considerando la imparidad concluimos que, para toda x:
La función es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -3\sqrt{2}\right) \bigcup \left(0, 3\sqrt{2}\right)$.
Y la función es cóncava hacia arriba en $\left(-3\sqrt{2}, 0\right) \bigcup \left(3\sqrt{2}, +\infty\right)$.

□

(d) Esbozo de la gráfica
▼
Calculemos además las asíntotas:
$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty$, luego $x = 0$ es asíntota vertical.
$f(x)$ no tiene máximo ni mínimo absoluto.
El rango de $f(x)$ es $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^{\pm}$, luego $y = 0$ es asíntota horizontal.
Con todos los elementos calculados, la gráfica de la función $f(x)$ se ve así



Claramente, $R_f = \mathbb{R}$.

□

(2) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva

$$\sqrt{5-y} + xy^2 = 6$$

en el punto $(4, 1)$.

▼ Efectivamente el punto $(4, 1)$ pertenece a la curva, pues haciendo $x = 4$ y también $y = 1$ obtenemos una identidad

$$\sqrt{5-1} + 4 \times 1^2 = \sqrt{4} + 4 \times 1 = 2 + 4 = 6.$$

Para hallar la pendiente de la recta tangente, supongamos que y es función de x y derivable entonces derivemos implícitamente con respecto a x

$$\frac{d}{dx}(5-y)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}6 \Rightarrow \frac{1}{2}(5-y)^{-\frac{1}{2}}(0-y') + \left[y^2\frac{dx}{dx} + x\frac{d}{dx}y^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-y'}{2\sqrt{5-y}} + y^2 + 2xyy' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-1}{2\sqrt{5-y}} + 2xy\right)y' = -y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-y^2}{\dfrac{-1}{2\sqrt{5-y}} + 2xy}\,.$$

La pendiente en el punto $(4, 1)$ es

$$y'(4,1) = \frac{-1^2}{\dfrac{-1}{2\sqrt{5-1}} + 2\times 4\times 1} = \frac{-1}{\dfrac{-1}{2\times 2} + 8} = \frac{-1}{\dfrac{31}{4}} = -\frac{4}{31}$$

por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

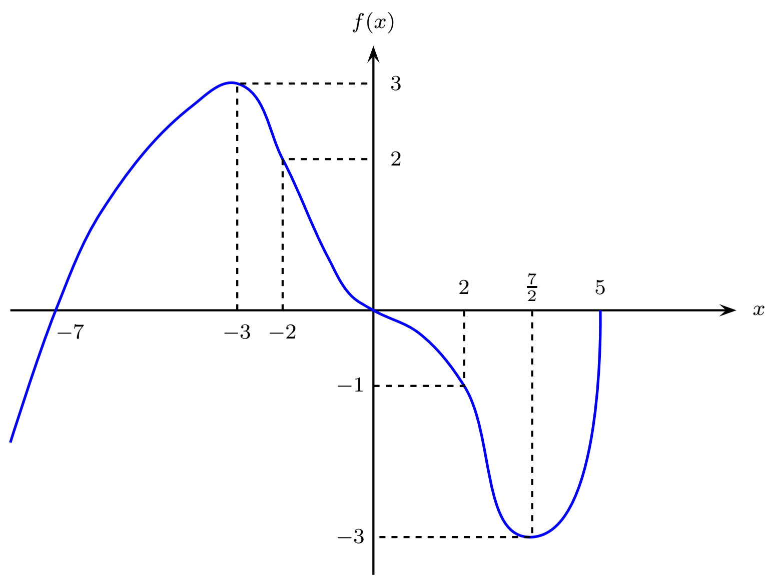
$$y - 1 = -\frac{4}{31}(x-4) \Rightarrow y = -\frac{4}{31}x + \frac{16}{31} + 1 \Rightarrow y = -\frac{4}{31}x + \frac{47}{31}\,.$$

La pendiente de la recta normal es $\dfrac{31}{4}$ y su ecuación es

$$y - 1 = \frac{31}{4}(x-4) \Rightarrow y = \frac{31}{4}x - \frac{124}{4} + 1 \Rightarrow y = \frac{31}{4}x - \frac{120}{4} \Rightarrow y = \frac{31}{4}x - 30.$$

□

(3) Si la gráfica de $f(x)$ es



Encontrar

(a) Dominio, raíces, paridad y rango

▼

Dominio: $D_f = (-\infty, 5]$.
Raíces: $x = -7$, $x = 0$ & $x = 5$.
No es par ni impar.
$R_f = (-\infty, 3]$.

□

(b) Monotonía, máximos y mínimos locales, y absolutos

▼

Es creciente en $(-\infty, -3)$ y en $\left(\dfrac{7}{2}, 5\right)$.

Y decreciente en $\left(-3, \dfrac{7}{2}\right)$.

Tiene un máximo local en $(-3, 3)$ y un mínimo local en $\left(\dfrac{7}{2}, -3\right)$; $(-3, 3)$ es máximo absoluto y no tiene mínimo absoluto.

□

(c) Concavidad y puntos de inflexión

▼
Es cóncava hacia arriba en $(-2, 0)$ y en $(2, 5)$
y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$; $(-2, 2)$, $(0, 0)$ y $(2, -1)$ son puntos de inflexión.

□

(d) Intervalos donde $f'(x) > 0$, donde $f'(x) < 0$, donde $f''(x) > 0$ y donde $f''(x) < 0$

▼
$f'(x) > 0$ en $(-\infty, -3)$ y en $\left(\dfrac{7}{2}, 5\right)$.
$f'(x) < 0$ en $(-3, 0)$ y en $\left(0, \dfrac{7}{2}\right)$.
$f''(x) > 0$ en $(-2, 0)$ y en $(2, 5)$.
$f''(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$.

□

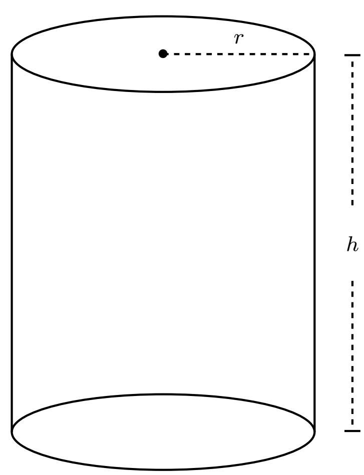
(e) Puntos donde $f'(x) = 0$ e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$

▼
$f'(x) = 0$ en $(-3, 3)$, en $(0, 0)$ y en $\left(\dfrac{7}{2}, -3\right)$.
$f(x) > 0$ en $(-7, 0)$.
$f(x) < 0$ en $(-\infty, -7)$ y en $(0, 5)$.

□

(4) Si se desea construir un bote cilíndrico sin tapa con capacidad de 1 m^3 que requiera la menor cantidad de material para su construcción ¿qué dimensiones debe tener?

▼ Usamos la figura siguiente



La cantidad que debe ser mínima es

$$A_T = A_L + A_B = 2\pi r h + \pi r^2,$$

donde A_T es el área total y A_L y A_B las áreas lateral y de la base respectivamente, r es el radio de la base y h es la altura, por lo que A_T es una función de las variables r, h, pero éstas están relacionadas por el volumen del cilindro,

$$V = \pi r^2 h = 1\mathrm{m}^3$$

luego

$$\pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}.$$

Por lo que:

$$A_T = \frac{2\pi r}{\pi r^2} + \pi r^2 \Rightarrow A_T = \frac{2}{r} + \pi r^2 = 2r^{-1} + \pi r^2;$$

ahora sí expresada como función de una sola variable: r.
Su punto crítico es cuando

$$\begin{aligned} A_T' &= \frac{-2}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\pi r &= \frac{2}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{2}{2\pi} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \\ \Rightarrow r &= \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \Rightarrow \\ \Rightarrow h &= \frac{1}{\pi \frac{1}{\pi^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{3}}} = r. \end{aligned}$$

Como

$$A_T'' = \frac{4}{r^3} + 2\pi > 0,$$

se trata de un mínimo.

$\square$