CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E0200

(1) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva
$$2x^3 + 2y^3 = 9xy$$
en el punto $(2, 1)$.

(2) La ley adiabática (sin pérdida ni ganancia de calor) para la expansión de un gas es
$$PV^{1.4} = C$$
(donde P es la presión, V el volumen y C una constante). En cierto instante, el volumen es de 1 ft^3, la presión es de 40 lb/ft^2 y ésta está creciendo a razón de 8 lb/ft^2 en cada segundo. Calcular la razón de variación del volumen en dicho instante.
(Considerar que lb = libra y ft = pie.)

(3) Bosquejar la gráfica de una función continua $f(x)$ que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$; $f(-3) = 0$; $f(-2) = 2$;
$f(1) = 0$; $f(3) = -2$; $f(5) = 0$; $f'(-3)$ no existe;
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3)\bigcup(-1, 3)$; $f'(x) > 0$ si $x \in (-3, -1)\bigcup(3, +\infty)$;
$f''(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3)\bigcup(-3, 1)\bigcup(5, +\infty)$; $f''(x) > 0$ si $x \in (1, 5)$.

(4) Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular con tapa y una capacidad para 600 l. Calcular las dimensiones que debe tener para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.
(Considerar que 1 l = 1 dm^3.)

(5) Para la función
$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$
determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva

$$2x^3 + 2y^3 = 9xy$$

en el punto $(2, 1)$.

▼ En primer lugar comprobemos que efectivamente el punto $(2, 1)$ pertenece a la curva $2x^3+2y^3 = 9xy$, verificando que sus coordenadas satisfacen a la ecuación, esto es sustituyendo $x = 2$ & $y = 1$, y que la ecuación se transforme en una identidad.

$$2(2)^3 + 2(1)^3 = (9)(2)(1) \Rightarrow (2)(8) + (2)(1) = 18 \Rightarrow 16 + 2 = 18 \Rightarrow 18 = 18.$$

Ahora calculemos la pendiente de la recta tangente pedida.
Supongamos que $2x^3 + 2y^3 = 9xy$ define implícitamente a una función $y(x)$ y lo que queremos hallar es su derivada, $y'(x)$.
Derivando implícitamente tenemos

$$6x^2 + 6y^2y' = 9y + 9xy'. \text{ Trasponiendo términos:}$$

$$6y^2y' - 9xy' = 9y - 6x^2. \text{ Factorizando } y':$$

$$(6y^2 - 9x)y' = 9y - 6x^2. \text{ Despejando } y':$$

$$y' = \frac{9y - 6x^2}{6y^2 - 9x}.$$

Para calcular la pendiente en el punto $(2, 1)$ en esta fórmula hacemos $x = 2$ & $y = 1$.

$$y'(2, 1) = \frac{9(1) - 6(2)^2}{6(1)^2 - 9(2)} = \frac{9 - 6(4)}{6(1) - 18} = \frac{9 - 24}{6 - 18} = \frac{-15}{-12} = \frac{5}{4}.$$

Luego, por último, la ecuación de la recta tangente pedida es la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 1)$ y que tiene pendiente $\frac{5}{4}$; ésta es

$$y - 1 = \frac{5}{4}(x - 2) = \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} + 1 \Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}.$$

□

(2) La ley adiabática (sin pérdida ni ganancia de calor) para la expansión de un gas es

$$PV^{1.4} = C$$

(donde P es la presión, V el volumen y C una constante). En cierto instante, el volumen es de 1 ft^3, la presión es de 40 lb/ft^2 y ésta está creciendo a razón de 8 lb/ft^2 en cada segundo. Calcular la razón de variación del volumen en dicho instante.
(Considerar que lb = libra y ft = pie.)

▼ De $PV^{1.4} = C$ se tiene que

$$V^{1.4} = \tfrac{C}{P} \Rightarrow V^{\frac{14}{10}} = \frac{C}{P} \Rightarrow V^{\frac{7}{5}} = \frac{C}{P}.$$

Despejando V y elevando ambos miembros de la igualdad a la potencia $\frac{5}{7}$:

$$V = \left(\frac{C}{P}\right)^{\frac{5}{7}} = C^{\frac{5}{7}}P^{-\frac{5}{7}}.$$

Derivando con respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{dV}{dt} = C^{\frac{5}{7}} \times \frac{dP^{-\frac{5}{7}}}{dt} = -\frac{5}{7} \times C^{\frac{5}{7}} \times P^{-\frac{12}{7}} \times P'.$$

Cuando $V = 1$ la $P = 40$ y como $C = PV^{1.4}$, entonces

$$C = 40;$$

Además, $\dfrac{dP}{dt} = 8$
Sustituyendo por último estos valores tenemos

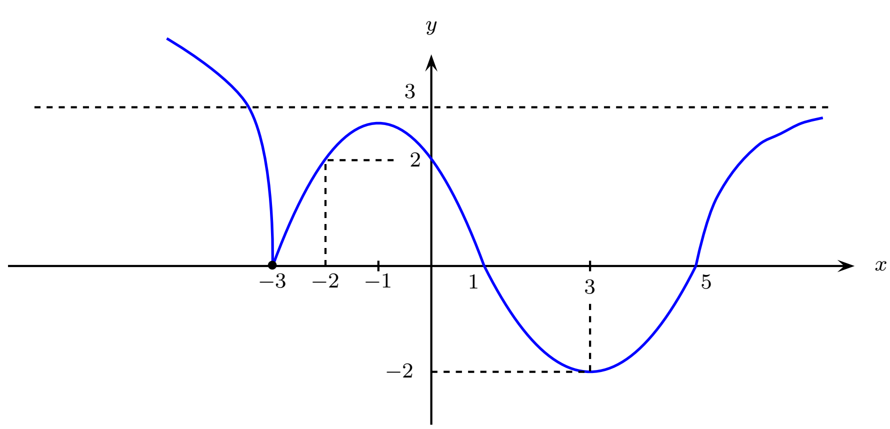
$$\frac{dV}{dt} = \frac{-5}{7}(40)^{\frac{5}{7}}(40^{-\frac{12}{7}})(8) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{-5}{7}40^{-1}(8) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{40}{7\times 40}\frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{7}\frac{\text{ft}^3}{\text{s}}.$$

□

(3) Bosquejar la gráfica de una función continua $f(x)$ que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$; $f(-3) = 0$; $f(-2) = 2$;
$f(1) = 0$; $f(3) = -2$; $f(5) = 0$; $f'(-3)$ no existe;
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3)\bigcup(-1, 3)$; $f'(x) > 0$ si $x \in (-3, -1)\bigcup(3, +\infty)$;
$f''(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3)\bigcup(-3, 1)\bigcup(5, +\infty)$; $f''(x) > 0$ si $x \in (1, 5)$.

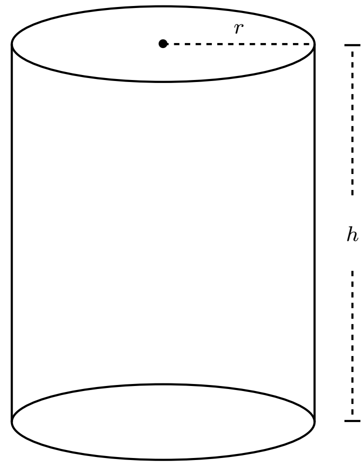
▼ Una posible gráfica de la función $f(x)$:



□

(4) Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular con tapa y una capacidad para 600 l. Calcular las dimensiones que debe tener para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción. (Considerar que 1 l = 1 dm^3.)

▼ Usamos la figura



El área total que deseamos que sea mínima es el área lateral $2\pi rh$ más el área de las dos bases $2\pi r^2$:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2,$$

donde r & h son dos variables, pero como $V = 600dm^3$ y $V = \pi r^2 h$, tenemos

$$600 = \pi r^2 h;$$

luego, despejando h

$$h = \frac{600}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula del área total, la podemos expresar como función de una única variable r:

$$A(r) = 2\pi r \frac{600}{\pi r^2} + 2\pi r^2.$$

Simplificando,

$$A(r) = \frac{1200}{r} + 2\pi r^2 = 1200r^{-1} + 2\pi r^2.$$

Busquemos el valor de r que hace que A sea mínima.
Derivando $A(r)$

$$\frac{dA(r)}{dr} = \frac{-1200}{r^2} + 4\pi r.$$

Igualando a cero:

$$\frac{-1200}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{1200}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{1200}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1200}{4\pi}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{300}{\pi}}.$$

Y ya que

$$h = \frac{600}{\pi\left(\frac{300}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow h = \frac{(2)(300)}{\pi\frac{300^{2/3}}{\pi^{2/3}}} \Rightarrow h = \frac{(2)(300)^{1/3}}{\pi^{1/3}} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{\frac{300}{\pi}} \Rightarrow h = 2r,$$

a partir de $\frac{dA(r)}{dr} = \frac{-1200}{r^2} + 4\pi r = -1200r^{-2} + 4\pi r$, calculamos la segunda derivada:

$$\frac{d^2A(r)}{dr^2} = \frac{2400}{r^3} + 4\pi,$$

la cual es positiva, por lo que para $r = \sqrt{\frac{300}{\pi}}$ & $h = 2r$, tenemos efectivamente un área mínima.

$\square$

(5) Para la función

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

▼ Intervalos de monotonía:
Calculemos la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{2(x-1)x^2 - 2x(x-1)^2}{x^4}.$$

Simplificando x y factorizando $2(x-1)$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-x+1)}{x^3} = \frac{2(x-1)}{x^3}, \text{ (con } x \neq 0).$$

De donde vemos que los valores críticos son 0 (donde la derivada no existe) y 1 (donde la derivada vale 0). Veamos ahora el signo de la derivada y de ahí inferiremos dónde la función es creciente y dónde decreciente.

Intervalo	x^3	$x-1$	f'	f es
$x < 0 (< 1)$	$-$	$-$	$+$	creciente
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$(0 <) 1 < x$	$+$	$+$	$+$	creciente

Aquí mismo vemos que para $x = 1$, es decir que, en el punto $(1, 0)$ de la gráfica de la función, hay un mínimo local pues la función ahí pasa de ser decreciente a ser creciente.
Intervalos de concavidad:
Calculemos la segunda derivada de la función

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 2(x-1)}{x^6};$$

simplificando x^2:

$$f''(x) = \frac{2x - 6(x-1)}{x^4} = \frac{2x - 6x + 6}{x^4} = \frac{-4x+6}{x^4} = \frac{2(3-2x)}{x^4};$$

$$f''(x) > 0 \text{ si } 3 - 2x > 0, \text{ es decir, si } 2x < 3 \text{ o bien } x < \frac{3}{2} \text{con } x \neq 0;$$

por lo que $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \bigcup \left(0, \frac{3}{2}\right)$;

$$f''(x) < 0 \text{ si } 3 - 2x < 0, \text{ esto es cuando } 2x > 3 \text{ o bien cuando } x > \frac{3}{2}.$$

De donde inferimos que $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ y que hay un punto de inflexión, $\left[\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$;

y como

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{1}{9},$$

el punto es $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{9}\right)$.

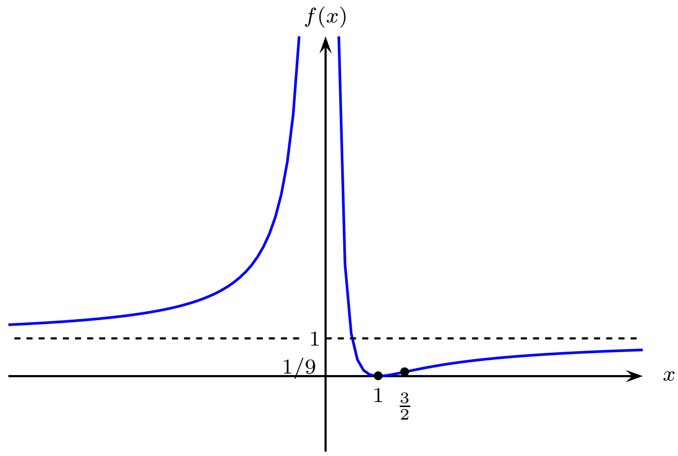
Para bosquejar la gráfica de la función, enfaticemos que $f(x)$ es continua en su dominio $\mathbb{R}-\{0\}$ y observemos que la recta $y=1$ es asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})=1-0+0=1$$

y que $x=0$ es asíntota vertical pues

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x)=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{(x-1)^2}{x^2}=+\infty.$$

Conjuntando todos estos elementos, la gráfica de la función $f(x)$ es:



$\square$