CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E0300

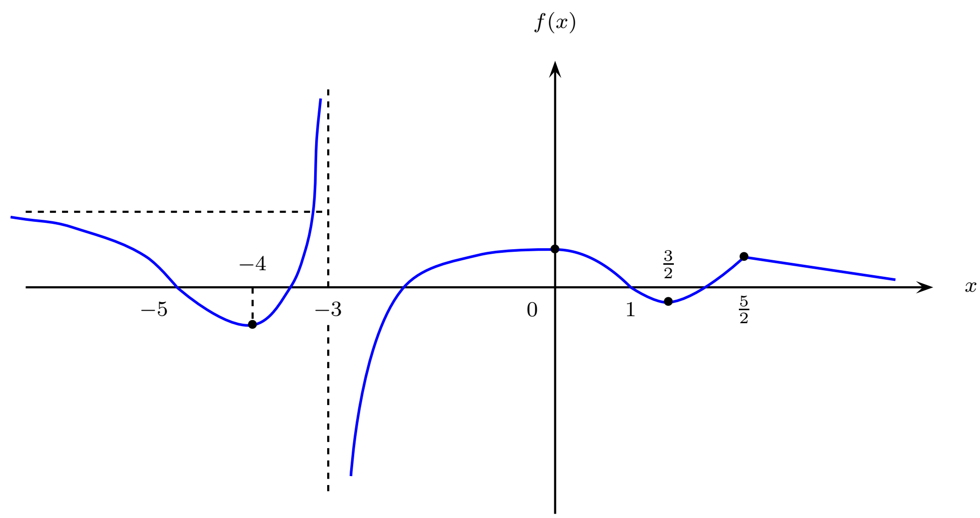
(1) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$\frac{4y^2 - 3x^2y}{3 - 4x^2} = -1,$$

en el punto $(-1, 1)$.

(2) La ley de Boyle afirma que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $P \times V = C$, donde C es una constante. Supóngase que en cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es de 150 KPa y ésta aumenta a razón de 20 KPa/min. ¿Con qué razón aumenta el volumen en ese instante?

(3) Considere la gráfica de la función f



Determinar el conjunto de $x \in D_f$ tales que:
(a) $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$
(b) $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$

(4) Sea

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}},$$

determinar D_f; intervalos de monotonía y de concavidad; máximos y mínimos locales y puntos de inflexión. Usando esta información, dibujar un esbozo de la gráfica de la función $f(x)$.

$$\left(\text{ojo: } f''(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x^5(x+3)^4}}\right).$$

(5) Dos puntos A, B se encuentran en la orilla de una playa recta, uno a la derecha del otro, separados 6 km entre sí. Un punto C esta frente a B a 3 km en el mar. Cuesta \$400.00 tender 1 km de tubería en la playa y \$500.00 en el mar.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Determine la forma más económica de trazar la tubería de $A - C$. (No necesariamente debe pasar por B.)

Respuestas

(1) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$\frac{4y^2-3x^2y}{3-4x^2}=-1,$$

en el punto $(-1,1)$.

▼ Observamos primero que el punto $(-1,1)$ sí pertenece a la curva, pues sus coordenadas $x=-1$ & $y=1$ satisfacen la ecuación

$$\frac{4\times 1^2-3(-1)^2\times 1}{3-4(-1)^2}=\frac{4\times 1-3\times 1\times 1}{3-4\times 1}=\frac{4-3}{3-4}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Para hallar la pendiente de la recta tangente derivamos

$$\frac{4y^2-3x^2y}{3-4x^2}=-1\Rightarrow 4y^2-3x^2y=-3+4x^2,\ (\text{si } 3-4x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2});$$

pensando que y es función implícita de x, con lo que obtenemos al derivar

$$8y\times y'-6xy-3x^2y'=8x$$

y de aquí despejamos y'

$$(8y-3x^2)y'=8x+6xy\Rightarrow y'=\frac{8x+6xy}{8y-3x^2}\,.$$

En el punto $(-1,1)$, la pendiente será:

$$y'(-1,1)=\frac{8(-1)+6(-1)\times 1}{8\times 1-3(-1)^2}=\frac{-8-6}{8-3}=\frac{-14}{5}=-\frac{14}{5}\,.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es

$$y-1=-\frac{14}{5}(x+1)\Rightarrow y=-\frac{14}{5}x-\frac{14}{5}+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=-\frac{14}{5}x-\frac{14-5}{5}\Rightarrow y=-\frac{14}{5}x-\frac{9}{5}\,.$$

□

(2) La ley de Boyle afirma que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $P\times V=C$, donde C es una constante. Supóngase que en cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es de 150 KPa y ésta aumenta a razón de 20 KPa/min. ¿Con qué razón aumenta el volumen en ese instante?

▼ Tenemos que $V=CP^{-1}$.

Entonces

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{C}{P^2}\frac{dP}{dt}\,.$$

Ahora bien $C=(150\,KPa)(600\text{ cm}^3)=90\,000\,KPa\times\text{ cm}^3$,

$$P^2=22500\ (KPa)^2$$

y

$$\frac{dP}{dt}=20\ KPa/\text{min en tal instante, luego:}$$

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{90\,000}{22\,500}\ \frac{KPa\ \text{cm}^3}{(KPa)^2}\times 20\ \frac{KPa}{\text{min}}=-4\times 20\text{ cm}^3/\text{min}=-80\text{ cm}^3/\text{min}$$

es la razón a la que decrece el volumen en el instante.

□

(3) (a) $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$

▼

$f'(x) > 0$ si $x \in (-4, -3) \bigcup (-3, 0) \bigcup \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$;

$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -4) \bigcup \left(0, \frac{3}{2}\right) \bigcup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$;

$f'(x) = 0$ si $x \in \left\{-4, 0, \frac{3}{2}\right\}$.

□

(b) $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$

▼

$f''(x) > 0$ si $x \in (-5, -3) \bigcup \left(1, \frac{5}{2}\right) \bigcup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$;

$f''(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -5) \bigcup (-3, 1)$;

$f''(x) = 0$ si $x \in \{-5, 1\}$.

□

(4) Sea

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}},$$

determinar D_f; intervalos de monotonía y de concavidad; máximos y mínimos locales y puntos de inflexión. Usando esta información, dibujar un esbozo de la gráfica de la función $f(x)$.

$\left(\text{ojo: } f''(x) = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x^5(x+3)^4}}\right)$.

▼ Intervalos:

Escribamos

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2} = [x(x+3)^2]^{\frac{1}{3}}.$$

Tenemos que $D_f = \mathbb{R}$, y que

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2 + 2x(x+3)}{3\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}} = \frac{(x+3)[(x+3)+2x]}{3x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \frac{3(x+3)(x+1)}{3x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}}\,.$$

Si $x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}$, el signo de $f'(x)$ nos lo da $\dfrac{x+1}{(x+3)^{\frac{1}{3}}}$ pues $x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}})^2$ es positivo para $x \neq 0$.

Averigüemos pues el signo de $(x+1)(x+3)^{-\frac{1}{3}}$ que es el de $f'(x)$, teniendo en cuenta que $x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}$ y que $f'(x) = 0$ si $x = -1$

Intervalo	$(x+3)^{-\frac{1}{3}}$	$x+1$	$f'(x)$	f es
$x < -3(< -1)$	$-$	$-$	$+$	creciente
$-3 < x < -1$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$(-3) < -1 < x < 0$	$+$	$+$	$+$	creciente
$(-3 < -1) < 0 < x$	$+$	$+$	$+$	creciente

Así calculando el signo de $f'(x)$, obtenemos los cuatro intervalos de monotonía.

Para hablar de concavidad, tenemos que calcular

$$f''(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{3}(x+1)\times x^{-\frac{4}{3}}(x+3)^{-\frac{2}{3}}[2x(x+3)+x^2]}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^2}} =$$
$$= \frac{3x^2(x+3)-(x+1)(3x^2+6x)}{x^{\frac{4}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}3x^{\frac{4}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3x^3+9x^2-3x^3-6x^2-3x^2-6x}{3x^{\frac{8}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} =$$
$$= \frac{-6x}{3x^{\frac{8}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{x^5(x+3)^4}}\,.$$

Calculamos su signo, que es el contrario al de x, esto es,

$$f''(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty,-3)\bigcup(-3,0);$$
$$f''(x) < 0 \text{ si } x > 0.$$

Luego, si $x \in (-\infty,-3)\bigcup(-3,0)$, $f(x)$ es cóncava hacia arriba y si $x>0$, $f(x)$ es cóncava hacia abajo. Los puntos críticos de $f(x)$ son 0, -1 y -3.

Tanto a la izquierda como a la derecha de 0, $f(x)$ es creciente; luego en 0 no hay valor extremo.

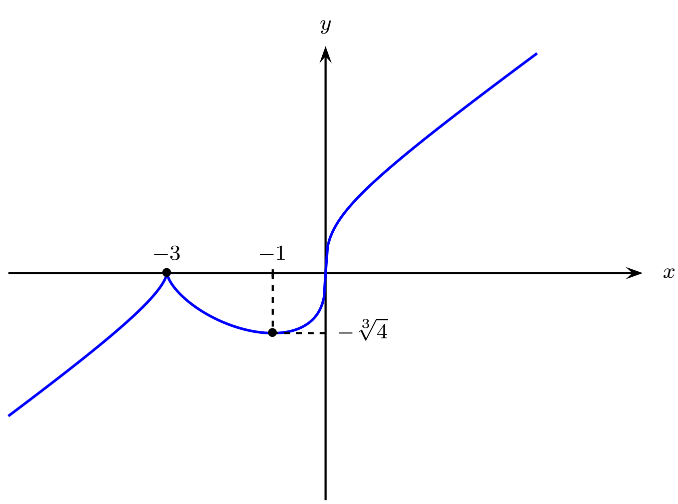
Máximos y mínimos:
Como $f''(-1) > 0$, en -1 hay un mínimo que vale

$$f(-1) = [-1(-1+3)^2]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-4} \approx -1.587401;$$

luego la gráfica de $f(x)$ contiene al punto $(-1,-1.587401)$.

En -3 hay máximo, pues $f(x)$ pasa de ser creciente a decreciente y vale $f(-3)=0$.

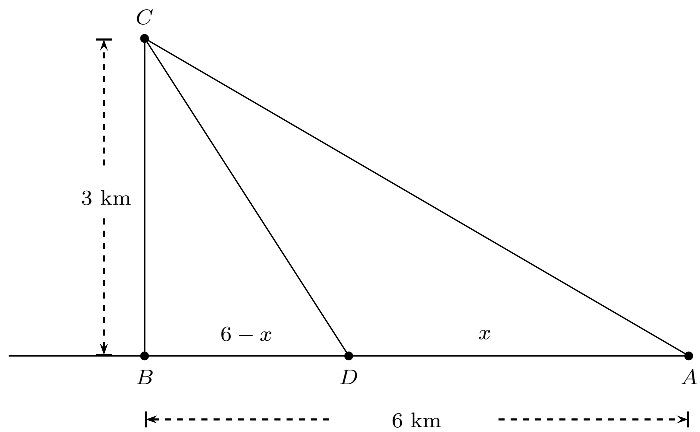
Puntos de inflexión:
Como en 0 la segunda derivada cambia de signo, ahí tenemos un punto de inflexión el cual, como $f(0)=0$, es el origen.
Usaremos también que $f(-1) = -\sqrt[3]{4}$.
La gráfica de la función $f(x)$:



$\square$

(5) Dos puntos A, B se encuentran en la orilla de una playa recta, uno a la derecha del otro, separados 6 km entre sí. Un punto C esta frente a B a 3 km en el mar. Cuesta \$400.00 tender 1 km de tubería en la playa y \$500.00 en el mar.
Determine la forma más económica de trazar la tubería de $A - C$. (No necesariamente debe pasar por B.)

▼ Hagamos un croquis



Pensemos que vamos a llevar la tubería desde A hasta D, un punto sobre la playa a x km de A, y de ahí a C por el mar; la distancia CD, como hipotenusa de un triángulo rectángulo con vértice en B es

$$CD = \sqrt{(6-x)^2 + 3^2} = (x^2 - 12x + 36 + 9)^{\frac{1}{2}} = (x^2 - 12x + 45)^{\frac{1}{2}}.$$

Queremos pues minimizar la función de costo

$$C(x) = 400x + 500(x^2 - 12x + 45)^{\frac{1}{2}}.$$

Cuyos puntos críticos son para

$$C'(x) = 400 + \frac{250(2x-12)}{\sqrt{x^2 - 12x + 45}} = \frac{400\sqrt{x^2 - 12x + 45} + 500(x-6)}{\sqrt{x^2 - 12x + 45}} = 0.$$

Es decir,

$$400\sqrt{x^2 - 12x + 45} = 500(6-x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 12x + 45} = \frac{5}{4}(6-x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 12x + 45 = \frac{25}{16}(36 - 12x + x^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9}{16}x^2 - 12x\left(\frac{25}{16} - 1\right) + \frac{25 \times 36}{16} - 45 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9}{16}x^2 - 12\left(\frac{9}{16}\right)x + \frac{225}{4} - 45 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9}{16}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{225 - 180}{4} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 - 108x + 180 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} = \begin{cases} 10 \\ 2; \end{cases}$$

entonces, $x = 2$ y desechamos $x = 10$, que se introdujo cuando elevamos al cuadrado.
Por otro lado, $C(x)$ es derivable en toda la recta, ya que $x^2 - 12x + 45$ no tiene raíces reales, pues $12^2 - 4 \times 45 < 0$. De hecho $x^2 - 12x + 45 > 0$ para cualquier x pues, por ejemplo, en 0 vale 45 la función continua $x^2 - 12x + 45$.

Calculemos la segunda derivada de $C(x)$, derivando de

$$\begin{aligned} C'(x) &= 400 + \frac{500(x-6)}{\sqrt{x^2 - 12x + 45}}; \\ C''(x) &= \frac{500\sqrt{x^2 - 12x + 45} - \dfrac{500(x-6)(2x-12)}{2\sqrt{x^2 - 12x + 45}}}{(\sqrt{x^2 - 12x + 45})^2} = \\ &= \frac{500[(x^2 - 12x + 45) - (x-6)^2]}{(x^2 - 12x + 45)^{\frac{3}{2}}} = \frac{500(x^2 - 12x + 45 - x^2 + 12x - 36)}{(x^2 - 12x + 45)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{500 \times 9}{(x^2 - 12x + 45)^{\frac{3}{2}}} > 0. \end{aligned}$$

Luego, efectivamente para $x = 2$ hay un mínimo.
En este caso el costo es

$$C(2) = 800 + 500\sqrt{4 - 24 + 45} = 800 + 500 \times 5 = 800 + 2\,500 = 3\,300 \text{ pesos.}$$

Si se hubiera tendido la tubería por el mar, desde A hasta C, el costo hubiese sido:

$$C(0) = 500\sqrt{45} \approx 500 \times 6.7082039 = 3354.102 > C(2).$$

Y si hubiese ido desde A hasta B por la playa y desde B hasta C por el mar, ambos en línea recta, el costo hubiese sido:

$$\begin{aligned} C(6) &= 400 \times 6 + 500\sqrt{9 - 36 + 45} = 2\,400 + 500 \times \sqrt{18} = 500 \times 2\sqrt{9} = \\ &= 2\,400 + 1\,000 \times 3 = 2\,400 + 3\,000 = 5\,400 \text{ pesos } > C(2) \text{ también.} \end{aligned}$$

$\square$