CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E0400

(1) Derivar la función siguiente: $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

(2) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

en el punto $(3, 3)$ (la hoja de Descartes).

(3) Dos trenes parten de una estación con 3 horas de diferencia. El primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/h. El segundo se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/h. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 2 horas después que partió el segundo tren?

(4) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 1)^2}$$

Proporcione:
(a) El dominio de la función : D_f
(b) Las raíces de la función
(c) Los intervalos de monotonía
(d) Los intervalos de concavidad
(e) La gráfica de la función

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Derivar la función siguiente: $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

▼

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\sqrt{x + \sqrt{x}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

□

(2) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

en el punto $(3, 3)$ (la hoja de Descartes).

▼ El punto $(3, 3)$ sí pertenece a la curva definida por $x^3 + y^3 = 6xy$ pues son coordenadas $x = 3$ & $y = 3$ satisfacen a la ecuación: $3^3 + 3^3 = 27 + 27 = 54 = 6 \cdot 3 \cdot 3$

Suponemos que $y = \phi(x)$ y calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) &= \frac{d}{dx}(6xy);\\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) &= 6\frac{d}{dx}(xy).
\end{aligned}
$$

Aplicando las reglas de la potencia y la del producto:

$$
\begin{aligned}
3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right);\\
3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\right);\\
3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 6x\frac{dy}{dx} + 6y.
\end{aligned}
$$

Dividiendo entre tres

$$x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = 2x\frac{dy}{dx} + 2y;$$

Despejamos $\dfrac{dy}{dx}$

$$y^2\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} = 2y - x^2;$$
$$(y^2 - 2x)\frac{dy}{dx} = 2y - x^2;$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Evaluamos la derivada en el punto $(3, 3)$ de la gráfica de la función implícitamente definida:

$$y'(3, 3) = \frac{2(3) - 3^2}{3^2 - 2(3)} = \frac{6 - 9}{9 - 6} = \frac{-3}{3} = -1.$$

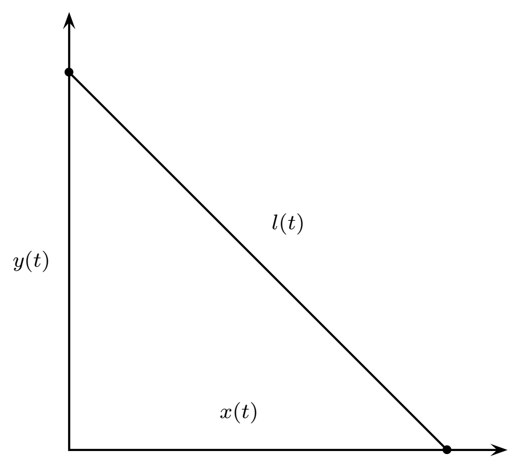
La ecuación de la recta tangente en el punto $(3, 3)$ con pendiente -1 es:

$$\frac{y - 3}{x - 3} = -1 \Rightarrow y - 3 = -x + 3 \Rightarrow y = -x + 6.$$

□

(3) Dos trenes parten de una estación con 3 horas de diferencia. El primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/h. El segundo se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/h. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 2 horas después que partió el segundo tren?

▼



Para todo valor de t, la posición del primer tren es $y(t)$, la posición del segundo tren es $x(t)$ y la distancia entre los trenes es $L(t)$.
Se cumple entonces

$$L^2 = x^2 + y^2.$$

Derivando implícitamente con respecto a t

$$2LL' = 2xx' + 2yy' \Rightarrow LL' = xx' + yy'$$
$$L' = \frac{xx' + yy'}{L}.$$

Si denotamos con $\bar{t}$ el momento en el cual han transcurrido dos horas después de que partió el segundo tren, tenemos

$$x(\bar{t}) = 120,\ x'(\bar{t}) = 60;$$
$$y(\bar{t}) = 500,\ y'(\bar{t}) = 100;$$
$$L(\bar{t}) = \sqrt{(x(\bar{t}))^2 + (y(\bar{t}))^2} = \sqrt{120^2 + 500^2} = \sqrt{14\,400 + 25\,0000} = \sqrt{26\,4400} \approx 514.19841.$$

Sustituyendo, tenemos

$$L'(\bar{t}) = \frac{120 \times 60 + 500 \times 100}{514.19841} \approx 111.2411\,.$$

□

(4) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2}\,.$$

Proporcione:

(a) El dominio de la función: D_f

▼ $D_f = R - \{\,1\,\}$.

□

(b) Las raíces de la función

▼ Las raíces: $\{\,-2, 2\,\}$.

□

(c) Los intervalos de monotonía

▼ Vamos a derivar la función (si $x - 1 \neq 0$)

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{x^2-4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2\dfrac{d}{dx}(x^2-4) - (x^2-4)\dfrac{d}{dx}(x-1)^2}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{(x-1)^2(2x) - (x^2-4)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(x-1)(2x) - (x^2-4)2]}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{(x-1)(2x) - 2(x^2-4)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 8}{(x-1)^3} =$$
$$= \frac{-2x+8}{(x-1)^3} = -2\frac{x-4}{(x-1)^3}\,.$$

La raíz de la derivada es $x = 4$. La derivada no está definida en $x = 1$.
El signo de la primera derivada viene dado por la expresión $-\dfrac{x-4}{x-1}$.
Los intervalos de monotonía los calculamos con la tabla siguiente

Intervalo	Valor de prueba	$-\frac{x-4}{x-1}$	Signo
$x < 1$	0	$-\frac{-4}{-1}$	$-$
$1 < x < 4$	2	$-\frac{2-4}{2-1}$	$+$
$4 < x$	10	$-\frac{10-4}{10-1}$	$-$

La función es decreciente en $(-\infty, 1]$ y en $(4, +\infty)$.
La función es creciente en $(1, 4)$.

□

(d) Los intervalos de concavidad

▼ Calculamos la segunda derivada (si $x - 1 \neq 0$)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left[-2\frac{x-4}{(x-1)^3}\right] = -2\frac{(x-1)^3\frac{d}{dx}(x-4) - (x-4)\frac{d}{dx}(x-1)^3}{[(x-1)^3]^2} =$$

$$= -2\frac{(x-1)^3(1) - (x-4)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = -2\frac{(x-1)^3 - 3(x-4)(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= -2\frac{(x-1)^2[(x-1) - 3(x-4)]}{(x-1)^6} = -2\frac{(x-1) - 3(x-4)}{(x-1)^4} =$$

$$= -2\frac{x - 1 - 3x + 12}{(x-1)^4} = -2\frac{-2x + 11}{(x-1)^4} =$$

$$= 2\frac{2x - 11}{(x-1)^4}\,.$$

La raíz de la segunda derivada es $x = \dfrac{11}{2}$. La derivada no está definida en $x = 1$.
El signo de la segunda derivada viene dado por la expresión $2x - 11$.
Los intervalos de concavidad los calculamos con la tabla siguiente

Intervalo	Valor de prueba	$2x - 11$	Signo
$x < 1$	0	-11	$-$
$1 < x < \frac{11}{2}$	2	-7	$-$
$\frac{11}{2} < x$	10	$20 - 11$	$+$

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1) \bigcup \left(1, \dfrac{11}{2}\right)$.

La función es cóncava hacia arriba en $\left(\dfrac{11}{2}, +\infty\right)$.

□

(e) La gráfica de la función

▼ Para calcular la asíntota horizontal calculamos

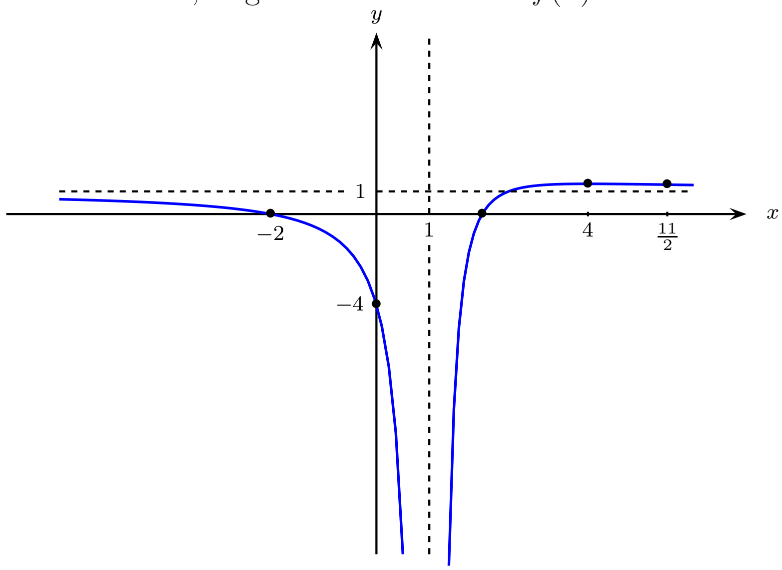
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = 1.$$

Tenemos una única asíntota horizontal: $y = 1$.
Tenemos igualmente una única asíntota vertical: $x = 1$.

Vamos a evaluar la función en algunos puntos

x	$f(x)$
0	-4
2	0
-2	0
4	1.3333
$\frac{11}{2}$	1.296

Usando toda la información anterior, la gráfica de la función $f(x)$ es:



$\square$