CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E0500

(1) Derivar la función siguiente: $y = \sqrt{x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}$

(2) Derivar la función siguiente: $y = \sqrt[4]{(1-3t)^4 + t^4}$

(3) Determinar los puntos de la curva

$$x^2 + y^2 = 4x + 4y$$

en los que la recta tangente es horizontal.

(4) Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de radar situada en el suelo a 4 millas de la rampa de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando está a 5 millas de la estación de radar y su distancia aumenta a razón de 3 600 milla/hora?

(5) Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Proporcione:
(a) El dominio de la función : D_f
(b) Los intervalos de monotonía
(c) Los intervalos de concavidad
(d) Los puntos de inflexión
(e) La gráfica de la función

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Derivar la función siguiente: $y = \sqrt{x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}$

▼

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}}\,\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}}\left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

□

(2) Derivar la función siguiente: $y = \sqrt[4]{(1-3t)^4 + t^4}$

▼

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sqrt[4]{(1-3t)^4 + t^4}\right) = \\
&= \frac{d}{dt}\left[(1-3t)^4 + t^4\right]^{\frac{1}{4}} = \\
&= \frac{1}{4}\left[(1-3t)^4 + t^4\right]^{\frac{1}{4}-1}\left[\frac{d}{dt}(1-3t)^4 + \frac{d}{dt}t^4\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left[(1-3t)^4 + t^4\right]^{-\frac{3}{4}}\left[4(1-3t)^{4-1}\frac{d}{dt}(1-3t) + 4t^{4-1}\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left[(1-3t)^4 + t^4\right]^{-\frac{3}{4}}\left[4(1-3t)^3(-3) + 4t^3\right] = \\
&= \left[(1-3t)^4 + t^4\right]^{-\frac{3}{4}}\left(-3 + 27t - 81t^2 + 81t^3 + t^3\right) = \\
&= (1 - 12t + 54t^2 - 108t^3 + 81t^4 + t^4)^{-\frac{3}{4}}(82t^3 - 81t^2 + 27t - 3) = \\
&= (82t^4 - 108t^3 + 54t^2 - 12t + 1)^{-\frac{3}{4}}(82t^3 - 81t^2 + 27t - 3).
\end{aligned}
$$

□

(3) Determinar los puntos de la curva

$$x^2 + y^2 = 4x + 4y$$

en los que la recta tangente es horizontal.

▼ Suponemos que $y = \phi(x)$ y calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4x + 4y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 4 + 4\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 4 - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2y - 4)\frac{dy}{dx} = 4 - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{2y - 4} = \frac{2 - x}{y - 2}.$$

La recta tangente es horizontal (paralela al eje x) si su derivada es cero. Es decir si:

$$\frac{2 - x}{y - 2} = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación que define implicitamente la función:

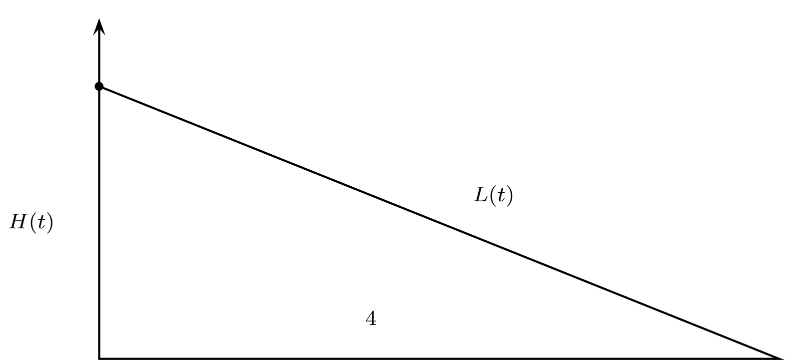
$$2^2 + y^2 = 4 \times 2 + 4y \Rightarrow y^2 - 4y - 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Los puntos solicitados son $(2, 2 - \sqrt{2})$ y $(2, 2 + \sqrt{2})$.

□

(4) Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de radar situada en el suelo a 4 millas de la rampa de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando está a 5 millas de la estación de radar y su distancia aumenta a razón de 3 600 milla/hora?

▼ Usamos la figura siguiente:



Donde $H(t)$ es la altura del cohete, $L(t)$ es la distancia del cohete a la estación de radar.
De la figura se tiene

$$L^2(t) = 16 + H^2(t).$$

Derivando implícitamente con respecto a t

$$2L(t)L'(t) = 2H(t)H'(t) \Rightarrow H'(t) = \frac{L(t)L'(t)}{H}.$$

Usando la condiciones proporcionadas, para el cohete cuando está a 5 millas de la estación de radar y llamando a ese momento $\bar{t}$, $L(\bar{t}) = 5$ y $L'(\bar{t}) = 3\,600$.
Sabemos que

$$H(\bar{t})^2 = L(\bar{t})^2 - 16 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow H(\bar{t}) = \sqrt{9} = 3.$$

Sustituyendo estos valores

$$H'(\bar{t}) = \frac{5 \times 3\,600}{3} = 6\,000 \text{ millas/hora}.$$

□

(5) Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Proporcione:

(a) El dominio de la función: D_f

▼

$D_f = \mathbb{R}$ (todos los números reales).

□

(b) Las raíces de la función

▼ No tiene raíces.

□

(c) Los intervalos de monotonía

▼ Vamos a derivar la función

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}.$$

La raíz de la derivada es $x = 0$.
El signo de la primera derivada viene dado por la expresión $-x$.
Los intervalos de monotonía los calculamos con la tabla siguiente

Intervalo	Valor de prueba	$-x$	Signo
$x < 0$	-1	1	$+$
$x > 0$	1	-1	$-$

La función es creciente en $(-\infty, 0)$.
La función es decreciente en $(0, +\infty)$.

□

(d) Los intervalos de concavidad

▼ Calculamos la segunda derivada

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left[-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{d}{dx}\left[-2\frac{x}{(1+x^2)^2}\right] = \\
&= -2\frac{(1+x^2)^2\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(1+x^2)^2}{[(1+x^2)^2]^2} = -2\frac{(1+x^2)^2 - x\times 2\times(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = \\
&= -2\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = -2\frac{(1+x^2)[(1+x^2)-4x^2]}{(1+x^2)^4} = \\
&= -2\frac{(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^3} = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} = \\
&= 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}\,.
\end{aligned}
$$

La raíces de la segunda derivada las obtenemos al resolver la ecuación

$$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

El signo de la segunda derivada viene dado por la expresión $3x^2 - 1$.
Los intervalos de concavidad los calculamos con la tabla siguiente

Intervalo	Valor de prueba	$3x^2 - 1$	Signo
$x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$	-10	$3(-10)^2 - 1$	$+$
$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-1	$-$
$\frac{\sqrt{3}}{3} < x$	10	$3(10)^2 - 1$	$+$

La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \bigcup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

La función es cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

□

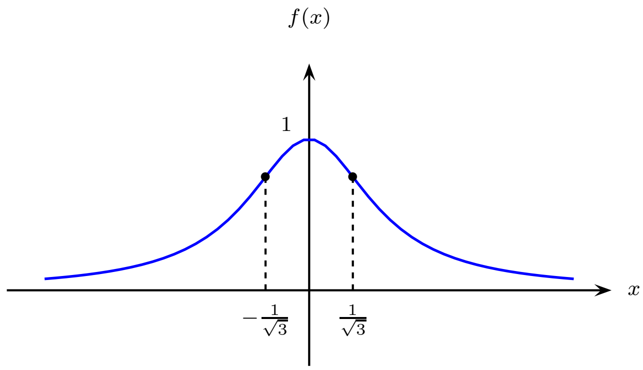
(e) Los puntos de inflexión

▼ En $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ hay puntos de inflexión.

□

(f) La gráfica de la función

▼ Notemos además que es una función par y la asíntota horizontal es $y = 0$.
Ahora, la gráfica de la función $f(x)$:


$f(x)$
1
x
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$