CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E0700

(1) Considere la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

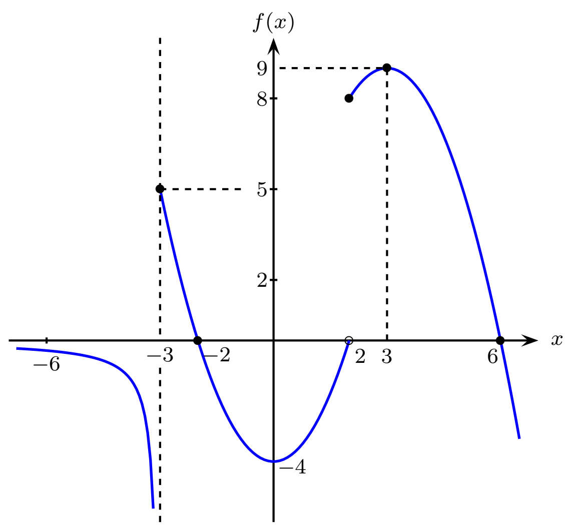
$$h(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}\,.$$

Halle el dominio y las raíces de la función. Las asíntotas verticales y las horizontales. Los puntos críticos. Los intervalos de concavidad. Haga un bosquejo de esa función.

(2) Una lámpara proyectora situada sobre el piso ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia la pared a una velocidad de 1.6 m/s ¿con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre la pared cuando se encuentra a 4 m de ésta?

(3) Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 12 m^3. El largo de su base es el triple de su ancho. El material para la base cuesta \$100.00 por metro cuadrado. El material para los costados cuesta \$60.00 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales para tener el más barato de esos recipientes.

(4) Considere la siguiente gráfica de la función f



Determine:
(a) Los puntos donde la derivada no existe.
(b) Los puntos donde $f'(x) = 0$
(c) Los intervalos donde $f' > 0$
(d) Los intervalos donde $f' < 0$
(e) Los intervalos donde $f'' > 0$
(f) Los intervalos donde $f'' < 0$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Considere la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}\,.$$

Halle el dominio y las raíces de la función. Las asíntotas verticales y las horizontales. Los puntos críticos. Los intervalos de concavidad. Haga un bosquejo de esa función.

▼ El dominio de la función: $D_h = \mathbb{R} - \{\,0\,\}$.
Las raíces de la función son aquellos valores que hacen cero el numerador (y no hacen cero el denominador), entonces

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ o bien } x = \sqrt{3}.$$

Asíntotas verticales: ceros del denominador que no son ceros del numerador. En este caso se ve claramente que la única asíntota vertical es $x = 0$ y que $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x) = \mp\infty$.
Asíntotas horizontales. Para esto calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 3}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}\right) = 0.$$

Entonces la única asíntota horizontal es $y = 0$.
Calculamos la derivada de la función

$$h'(x) = \frac{x^3(2x) - (x^2 - 3)(3x^2)}{x^6} = \frac{x^2[x(2x) - (x^2 - 3)(3)]}{x^6} =$$
$$= \frac{2x^2 - 3x^2 + 9}{x^4} \Rightarrow$$
$$\text{(A)} \qquad \Rightarrow h'(x) = \frac{-x^2 + 9}{x^4}\,.$$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos a cero la primera derivada:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |\,x\,| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ o bien } x = -3.$$

Puesto que en $x = 0$ hay una asíntota vertical, consideramos como intervalos de prueba para el signo de la primera derivada a $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, \infty)$.
Sólo consideramos el numerador, pues el denominador de la primera derivada siempre es positivo. Así

$$x = -4 \Rightarrow -x^2 + 9 = -(-4)^2 + 9 < 0 \Rightarrow h'(-4) < 0 \Rightarrow h'(x) < 0 \text{ si } x \in (-\infty, -3)\,;$$
$$x = -2 \Rightarrow -x^2 + 9 = -(-2)^2 + 9 > 0 \Rightarrow h'(-2) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0 \text{ para } x \in (-3, 0)\,;$$
$$x = 2 \Rightarrow -x^2 + 9 = -(2)^2 + 9 > 0 \Rightarrow h'(2) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0 \text{ con } x \in (0, 3)\,;$$
$$x = 4 \Rightarrow -x^2 + 9 = -(4)^2 + 9 < 0 \Rightarrow h'(4) < 0 \Rightarrow h'(x) < 0 \text{ si } x \in (3, +\infty)\,.$$

Pues $h'(x)$ es continua en tales intervalos.
Concluimos entonces que:
La función $h(x)$ es creciente en $(-3, 0)$ y en $(0, 3)$.
La función $h(x)$ decreciente en $(-\infty, -3)$ y en $(3, +\infty)$.
Para $x = -3$ hay un mínimo, $h(-3) = \dfrac{-2}{9} = -0.\overline{2}$, pues ahí la función pasa de ser decreciente a ser creciente y para $x = 3$ hay un máximo, $h(3) = 0.\overline{2}$, pues ahí, por lo contrario, pasa de ser creciente a ser decreciente.

Calculamos ahora la segunda derivada de la función, a partir de (A).

$$h''(x) = \left(\frac{9-x^2}{x^4}\right)' = \frac{-2x^5 - 4x^3(9-x^2)}{x^8} =$$
$$= \frac{-2x^5 - 36x^3 + 4x^5}{x^8} = \frac{2(x^2-18)}{x^5}\,.$$

Si $x > 0$, el signo de la derivada nos lo da $x^2 - 18$, luego entonces:

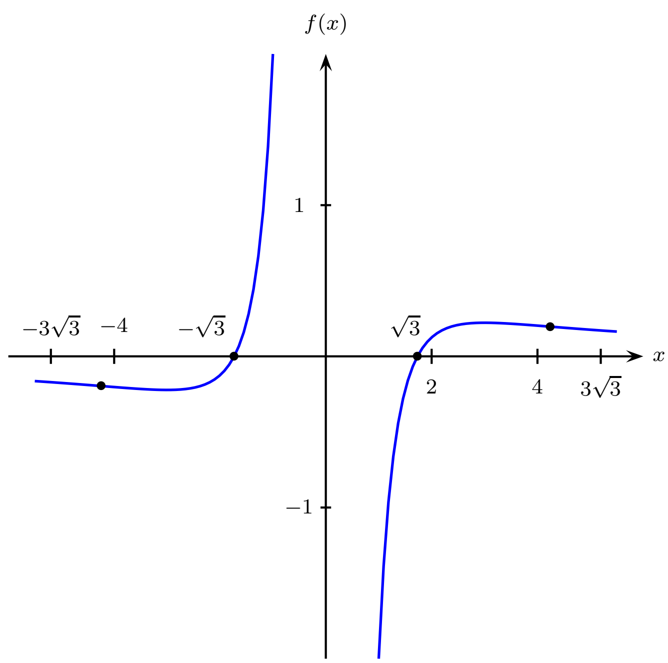
$$\text{Para } x>0\text{: } h''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 18 = (x+3\sqrt{2})(x-3\sqrt{2}) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{llllll}
x+3\sqrt{2} > 0 & \text{y} & x-3\sqrt{2} > 0 & \text{o bien} & x+3\sqrt{2} < 0 & \text{y} \quad x-3\sqrt{2} < 0; \\
x > -3\sqrt{2} & \text{y} & x > 3\sqrt{2} & \text{o bien} & x < -3\sqrt{2} & \text{y} \quad x < 3\sqrt{2}; \\
x \in \left(3\sqrt{2}, +\infty\right) & & & \text{o bien} & x \in \left(-\infty, -3\sqrt{2}\right). &
\end{array}$$

Entonces, si $x > 0$:
$h(x)$ es cóncava hacia arriba si $x \in \left(3\sqrt{2}, +\infty\right)$.
$h(x)$ es cóncava hacia abajo si $x \in \left(0, 3\sqrt{2}\right)$. Por complemento.

Como $h(x)$ es impar concluimos que:
$h(x)$ es cóncava hacia arriba si $x \in \left(-3\sqrt{2}, 0\right) \bigcup \left(3\sqrt{2}, +\infty\right)$.
$h(x)$ es cóncava hacia abajo si $x \in \left(-\infty, -3\sqrt{2}\right) \bigcup \left(0, 3\sqrt{2}\right)$.

Luego los puntos $\left(-3\sqrt{2}, \dfrac{-5}{18\times\sqrt{2}}\right) \approx (-4.242, -0.1964)$ y $\left(3\sqrt{2}, \dfrac{5}{18\times\sqrt{2}}\right)$ son de inflexión.
Con todos estos datos, podemos hacer el bosquejo de la gráfica de la función $h(x)$:



$\square$

(2) Una lámpara proyectora situada sobre el piso ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia la pared a una velocidad de 1.6 m/s ¿con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre la pared cuando se encuentra a 4 m de ésta?

▼ Veamos la figura A, en el momento que el hombre se encuentra a 4 m de la pared:

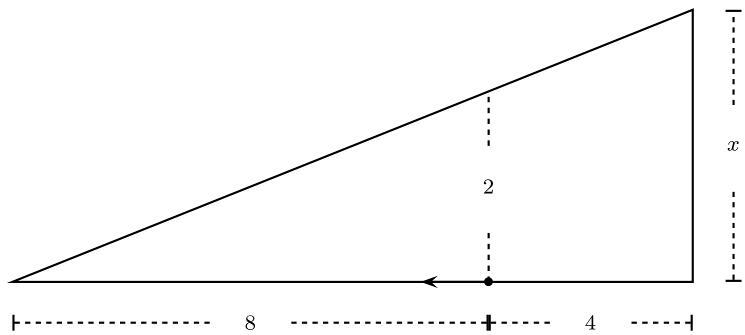


Figura A

Y la figura B, en un momento cualquiera:

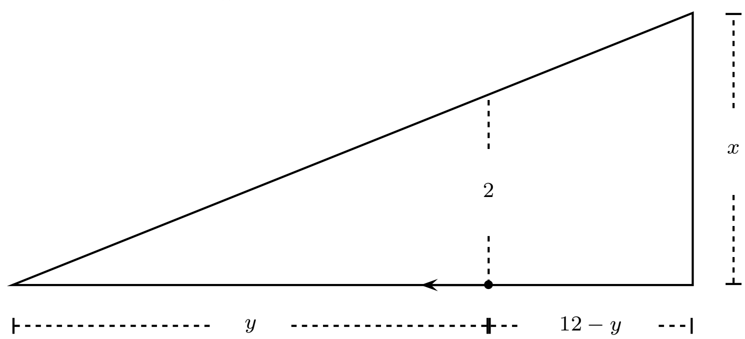


Figura B

De esta última figura B se tiene la relación:

$$\frac{x}{12} = \frac{2}{y} \Rightarrow xy = 24.$$

Derivando esta igualdad con respecto al tiempo t, nótese que tenemos $x(t)$ & $y(t)$.

$$x'y + xy' = 0 \Rightarrow x' = \frac{-xy'}{y}.$$

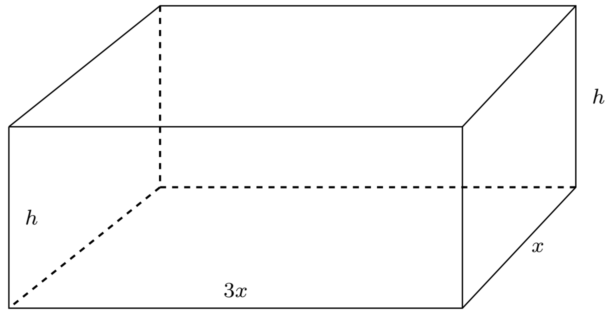
En el momento de la figura A tenemos los valores: $y' = 1.6$ m/s, $y = 8$ m & $x = \frac{24}{8} = 3$ m.
Por lo tanto, en ese momento, su sombra decrece con una rapidez igual a

$$x' = -\frac{3 \times 1.6}{8} = -\frac{3}{5} \text{ m/s.}$$

□

(3) Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 12 m^3. El largo de su base es el triple de su ancho. El material para la base cuesta \$100.00 por metro cuadrado. El material para los costados cuesta \$60.00 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales para tener el más barato de esos recipientes.

▼ Usamos la siguiente figura



El volumen del recipiente viene dado por

$$V = (x)(3x)(h) = 3x^2h = 12;$$
$$A_{\text{base}} = 3x^2, \quad \text{costo } C_{\text{base}}(x) = 300x^2;$$
$$A_{\text{laterales}} = 2xh + 2 \times 3xh = 8xh.$$

Costo del material para las caras laterales:

$$C_{\text{laterales}} = 8xh \times 60 = 480xh.$$

Costo total:

$$C_T = 300x^2 + 480xh.$$

Como esta función es de dos variables, x, h, despejamos de la fórmula del volumen una de ellas, digamos h:

$$h = \frac{12}{3x^2} = \frac{4}{x^2}\,.$$

Y sustituyendo este valor en la expresión para el costo total, tendremos una función de una sola variable x, que es la que queremos minimizar

$$C_T(x) = 300x^2 + 480x\frac{4}{x^2} = 300x^2 + \frac{1\,920}{x}\,.$$

Derivando, obtenemos:

$$C_T'(x) = 600x - \frac{1\,920}{x^2}\,.$$

Y el punto crítico será cuando

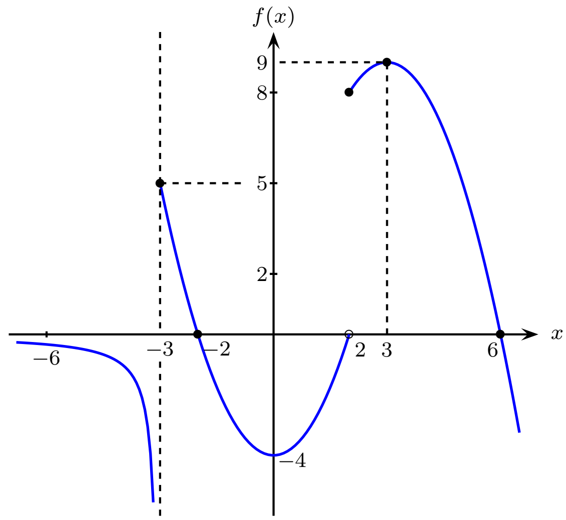
$$600x - \frac{1\,920}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1\,920}{600} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{16}{5}} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\,.$$

Luego $3x = 6\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$ así como $h = \dfrac{4}{4\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ son las dimensiones del recipiente que hace que el costo de los materiales para fabricarlo sea mínimo, pues

$$C_T''(x) = 600 + \frac{3\,840}{x^3} > 0 \text{ para } x = 2\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\,.$$

□

(4) Considere la siguiente gráfica de la función $f(x)$:



Determine:

(a) Los puntos donde la derivada no existe

▼ $x = -3$ & $x = 2$.

☐

(b) Los puntos donde $f'(x) = 0$

▼ $x = 0$ & $x = 3$.

☐

(c) Los intervalos donde $f' > 0$

▼ $(0, 2)$ & $(2, 3)$.

☐

(d) Los intervalos donde $f' < 0$

▼ $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ y $(3, +\infty)$.

☐

(e) Los intervalos donde $f'' > 0$

▼ $(-3, 2)$.

☐

(f) Los intervalos donde $f'' < 0$

▼ $(-\infty, -3)$ y $(2, +\infty)$.

☐