CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E0900

(1) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangente y perpendicular en el punto $(0, 25)$ a la curva definida implícitamente por

$$(xy^2 + 9)^2 = (y + 2)^{4/3}.$$

(2) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} - x^2 + 3$$

(a) Determinar dominio, intervalos de continuidad y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
(No determine las raíces de f).

(b) Determine los puntos críticos y los intervalos de monotonía

(c) Clasifique los puntos críticos (extremos) y determine los intervalos de concavidad.

(d) Obtenga los puntos de inflexión, la gráfica de f y el número de raíces de f.
(No intente calcular las raíces de f)

(3) El radio de una esfera se incrementa a razón de 2 cm/seg.

(a) ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio mide $r = 5$ cm?

(b) ¿Cuál es la medida del radio cuando la razón de cambio del volumen es 512 cm^3/seg?

(4) Un ranchero tiene 300 m de malla para cercar dos corrales rectangulares contiguos, es decir, comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangente y perpendicular en el punto $(0, 25)$ a la curva definida implícitamente por

$$(xy^2 + 9)^2 = (y + 2)^{4/3}.$$

▼ Efectivamente el punto $(0, 25)$ pertenece a la curva pues sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$(0 + 9)^2 = (25 + 2)^{4/3} \text{ pues } 81 = (\sqrt[3]{27})^4 \Leftrightarrow 81 = 3^4.$$

Calculamos la pendiente de la tangente a la curva derivando respecto a x

$$2(xy^2 + 9)(y^2 + 2xyy') = \frac{4}{3}(y + 2)^{1/3}y'.$$

Trasponiendo términos

$$2(xy^2 + 9)2xyy' - \frac{4}{3}(y + 2)^{1/3}y' = -2xy^4 - 18y^2.$$

Factorizando

$$y'\left[4xy(xy^2 + 9) - \frac{4}{3}(y + 2)^{1/3}\right] = -2(xy^2 + 9)y^2$$

luego, por último, despejando

$$y' = \frac{-2(xy^2 + 9)y^2}{4xy(xy^2 + 9) - \frac{4}{3}(y + 2)^{1/3}}$$

y en el punto $(0, 25)$, la pendiente de la tangente es

$$y'(0, 25) = \frac{-18 \times 25^2}{-\frac{4}{3}(25 + 2)^{1/3}} = \frac{18 \times 625}{4} = \frac{5625}{2};$$

la de la normal es $-\frac{2}{5625}$, por lo que las respectivas ecuaciones son:

$$y - 25 = \frac{5625}{2}x \Rightarrow y = \frac{5625}{2}x + 25 \text{ es la ecuación de la tangente; además,}$$

$$y - 25 = -\frac{2}{5625}x \Rightarrow y = -\frac{2}{5625}x + 25 \text{ es la ecuación de la normal.}$$

□

(2) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} - x^2 + 3.$$

(a) Determinar dominio, intervalos de continuidad y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(No determine las raíces de f.)

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R}$ donde f es continua.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^6\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^6}\right)\right] = +\infty.$$

□

(b) Determine los puntos críticos y los intervalos de monotonía

▼

$$f'(x) = x^5 + 2x^3 - 2x = x(x^4 + 2x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \& \ x^4 + 2x^2 - 2 = 0.$$

Resolviendo esta última ecuación para x^2

$$x^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\,.$$

Como estamos entre números reales, desechamos los valores de x tales que $x^2 = -1 - \sqrt{3}$, por ser $-1 - \sqrt{3} < 0$.

Luego $x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{3}} \approx \pm\sqrt{-1 + 1.7320508} = \pm\sqrt{0.7320508} \approx \pm 0.8555996$.
Estos dos valores, junto con $x = 0$ constituyen los puntos críticos; además

$$f'(x) = x(x^2 + 1 + \sqrt{3})(x - \sqrt{-1+\sqrt{3}})(x + \sqrt{-1+\sqrt{3}}).$$

Como $x^2 + 1 + \sqrt{3} > 0$ siempre, el signo de $f'(x)$ nos lo da

$$x(x - \sqrt{-1+\sqrt{3}})(x + \sqrt{-1+\sqrt{3}}).$$

Veámoslo

	Signo de			
Intervalo	$x + \sqrt{-1+\sqrt{3}}$	x	$x - \sqrt{-1+\sqrt{3}}$	$f'(x)$
$x < -\sqrt{-1+\sqrt{3}}(< 0 < \sqrt{-1+\sqrt{3}})$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-\sqrt{-1+\sqrt{3}} < x < 0(< \sqrt{-1+\sqrt{3}})$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(-\sqrt{-1+\sqrt{3}} <)0 < x < \sqrt{-1+\sqrt{3}}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(-\sqrt{-1+\sqrt{3}} < 0 <)\sqrt{-1+\sqrt{3}} < x$	$+$	$+$	$+$	$+$

Luego
La función $f(x)$ es creciente en $\left(-\sqrt{-1+\sqrt{3}}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{-1+\sqrt{3}}, +\infty\right)$.
La función $f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$.

□

(c) Clasifique los puntos críticos (extremos) y determine los intervalos de concavidad

▼ En $x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{3}}$ tenemos mínimos relativos.
y en $x = 0$ máximo relativo pues $f(x)$ pasa de ser creciente a decreciente, a diferencia de los otros dos anteriores en que $f(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente.
Para determinar los intervalos de concavidad calculemos la segunda derivada

$$f''(x) = 5x^4 + 6x^2 - 2.$$

Veamos ahora dónde es positiva y dónde es negativa.

$$5x^4 + 6x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36+40}}{10} = -\frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5}\,.$$

Nuevamente desechamos los x tales que $x^2 = -\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$ pues no son reales, y tenemos sólo dos puntos x tales que anulan la ecuación de cuarto grado:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} \approx \pm 0.521325$$

y

$$\begin{aligned} f''(x) &= 5\left(x^4 + \frac{6}{5}x^2 - \frac{2}{5}\right) = \\ &= 5\left(x^2 + \frac{3+\sqrt{19}}{5}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right). \end{aligned}$$

Como $x^2 + \frac{3+\sqrt{19}}{5} > 0$ siempre, el signo de $f''(x)$ nos lo da

$$\left(x + \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right).$$

Veámoslo:

	Signo de		
Intervalo	$x + \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}$	$x - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}$	$f''(x)$
$x < -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} \left(< \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)$	$-$	$-$	$+$
$-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} < x < \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}$	$+$	$-$	$-$
$\left(-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} <\right) \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} < x$	$+$	$+$	$+$

Luego $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right) \bigcup \left(\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}, +\infty\right)$.

Y $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $\left(-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}, \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)$.

□

(d) Obtenga los puntos de inflexión, la gráfica de f y el número de raíces de f
(No intente calcular las raíces de f.)

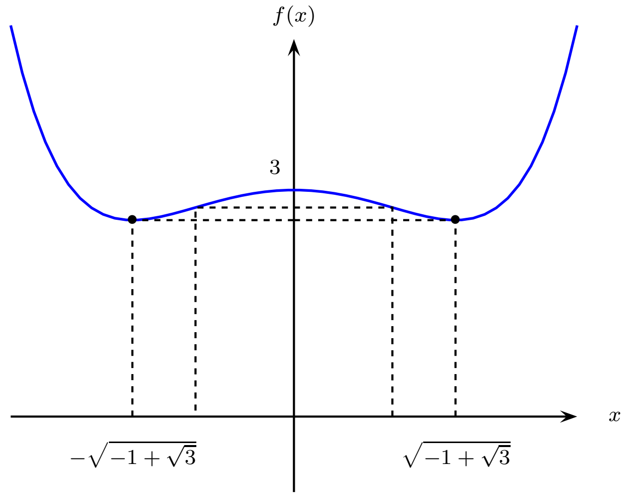
▼ Los puntos de inflexión se tienen para $x = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}$, pues en ellos la segunda derivada vale cero y cambia de signo.

Ahora bien,

$$f\left(\pm\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right) = 3+1-\sqrt{3}+\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}+\frac{3\sqrt{3}-3\times 3+3\sqrt{3}-1}{6} =$$

$$= 4-\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{5}{3} = \frac{13}{3}-\sqrt{3} \approx 2.6012825\,.$$

Luego $(\pm\sqrt{-1+\sqrt{3}}, 2.6012825)$ son puntos de la gráfica de $f(x)$ donde hay mínimos relativos.
En $(0,3)$ hay un máximo relativo.
La gráfica de $f(x)$ es:



Resulta que los mínimos relativos son también mínimos absolutos.
Los puntos de inflexión son

$$\left[\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}, f\left(\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)\right] \approx$$

$$\approx \left(\pm 0.521325, 3-\frac{\sqrt{19}-3}{5}+\frac{19-6\sqrt{19}+9}{50}+\frac{19\sqrt{19}-171+27\sqrt{19}-27}{750}\right) =$$

$$= \left(\pm 0.521325, 3+\frac{-150\sqrt{19}+450+420-90\sqrt{19}+46\sqrt{19}-198}{750}\right) =$$

$$= \left(\pm 0.521325, 3+\frac{-194\sqrt{19}+672}{750}\right) \approx (\pm 0.521325, 2.7684981).$$

La función no tiene raíces.
Todo concuerda con que la función $f(x)$ es par.

□

(3) El radio de una esfera se incrementa a razón de 2 cm/s.

(a) ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio mide $r = 5$ cm?

▼ Sabemos que $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Luego

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \text{ y } \frac{dV}{dt}(t) = 4\pi r^2(t)\times r'(t)$$

Como $r(t_0) = 5cm \Rightarrow r^2(t_0) = 25cm^2$ y $r'(t_0) = 2$ cm/s, luego:

$$\frac{dV(t_0)}{dt} = 4\pi \times 25 \times 2 \text{ cm}^3/\text{s} = 200\pi \text{ cm}^3/\text{s}$$

□

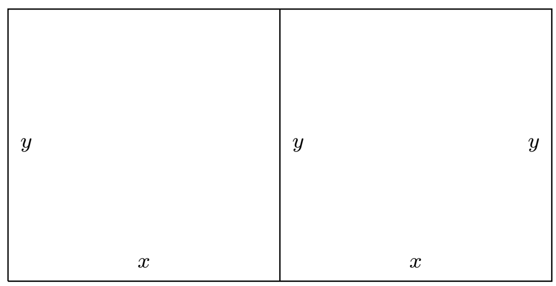
(b) ¿Cuál es la medida del radio cuando la razón de cambio del volumen es 512 cm^3/s?

▼ Si $\dfrac{dV(t)}{dt} = 4\pi r^2(t) \times 2 = 512 \Rightarrow r^2(t) = \dfrac{512}{8\pi} = \dfrac{64}{\pi} \Rightarrow r(t) = \dfrac{8}{\sqrt{\pi}}$ cm.

□

(4) Un ranchero tiene 300 m de malla para cercar dos corrales rectangulares contiguos, es decir, comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.

▼ Usamos la siguiente figura



Tenemos que perímetro y área son:

$$P(x, y) = 4x + 3y = 300 \quad \& \quad A(x, y) = 2xy$$

Pero como $y = \dfrac{300 - 4x}{3}$, tenemos que

$$A(x) = \frac{2x(300 - 4x)}{3} = 200x - \frac{8}{3}x^2$$

y que

$$A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{3}x = 200 \Leftrightarrow x = \frac{600}{16} = \frac{75}{2}$$

$$y = \frac{300 - 150}{3} = 50$$

y como

$$A''(x) = -\frac{16}{3} < 0 \Rightarrow \text{, se trata de un máximo.}$$

□