CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E0100

(1) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

en el punto $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.

(2) A un depósito cilíndrico de base circular de 5 m de radio, le está entrando agua a razón de 25 l por segundo. Calcular la rapidez a la que sube la superficie del agua. Considere que 1 l = 1 dm^3.

(3) Bosquejar la gráfica de una función continua f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;	$f(0) = 0$; $f(1) = -2$;
$f(3) = -1$;	$f'(0)$ no existe;	$f'(1) = 0$, $f''(3) = 0$.
$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \bigcup (1, +\infty)$;	$f'(x) < 0$ si $x \in (0, 1)$;	
$f''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, 3)$;	$f''(x) < 0$ si $x \in (3, +\infty)$;	

(4) Se quiere construir una cisterna con base rectangular y sin tapa, de manera tal que el ancho de la base sea el doble de la altura de la cisterna. Calcular las dimensiones que debe tener la cisterna para que el volumen sea de 20 m^3 y se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

(5) Para la función

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 - x^2}\,,$$

determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia abajo y hacia arriba. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

en el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

▼ Vamos a comprobar que el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ está sobre la curva

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27} + \frac{512}{27} - \frac{192}{9} =$$
$$= \frac{64 + 512 - 576}{27} = \frac{576 - 576}{27} = \frac{0}{27} = 0.$$

Para calcular la derivada consideramos que $y = f(x)$ está definida de manera implícita por $x^3+y^3-6xy = 0$. Entonces, derivando implícitamente, tenemos

$$3x^2 + 3y^2y' - 6(y + xy') = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (3y^2 - 6x)y' = 6y - 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x}\,.$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente, evaluamos la derivada anterior en el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$:

$$y'\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) = \frac{6\left(\frac{8}{3}\right) - 3\left(\frac{4}{3}\right)^2}{3\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{48}{3} - \frac{48}{9}}{\frac{192}{9} - \frac{24}{3}} = \frac{\frac{144-48}{9}}{\frac{192-72}{9}} =$$
$$= \frac{96}{120} = \frac{4}{5}\,.$$

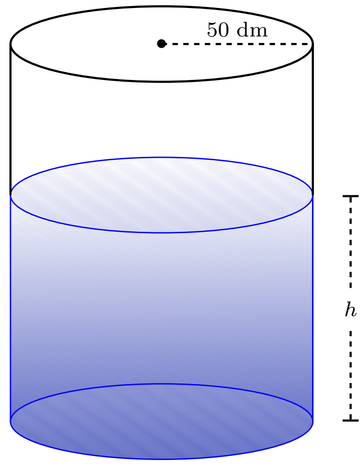
Por último, la ecuación de la recta tangente es

$$\frac{y - \frac{8}{3}}{x - \frac{4}{3}} = \frac{4}{5} \Rightarrow y - \frac{8}{3} = \frac{4}{5}x - \frac{16}{15} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{8}{3} - \frac{16}{15} \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{24}{15} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{8}{5}\,.$$

□

(2) A un depósito cilíndrico de base circular de 5 m de radio, le está entrando agua a razón de 25 l por segundo. Calcular la rapidez a la que sube la superficie del agua. Considere que 1 l = 1 dm^3.

▼ Vamos primero a unificar unidades.
Radio de la base: $r = 5$ m $= 50$ dm.
En un instante arbitrario la altura del agua es h.



El volumen del agua en ese instante es

$$V = \pi r^2 h = 2500\pi h.$$

Derivando con respecto a t

$$V' = 2500\pi h'.$$

Se sabe que $V' = 25$ dm^3/s. Se pide h'. Así

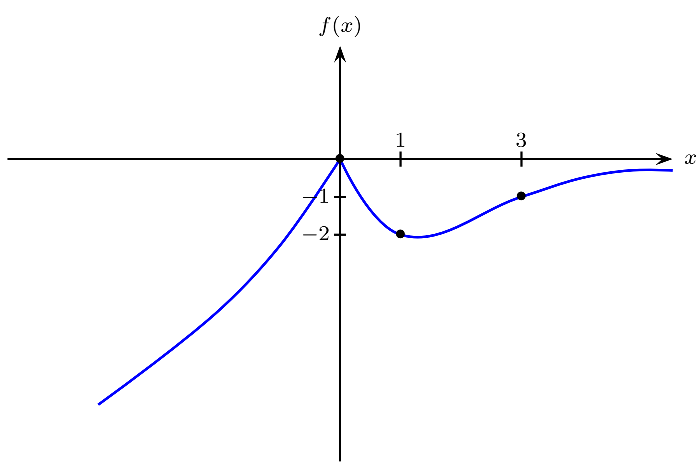
$$h' = \frac{V'}{2500\pi} = \frac{25}{2500\pi} = \frac{1}{100\pi} \text{ dm/s.}$$

□

(3) Bosquejar la gráfica de una función continua f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $f(0) = 0$; $f(1) = -2$;
$f(3) = -1$; $f'(0)$ no existe; $f'(1) = 0$, $f''(3) = 0$.
$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \bigcup (1, +\infty)$; $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 1)$;
$f''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, 3)$; $f''(x) < 0$ si $x \in (3, +\infty)$;

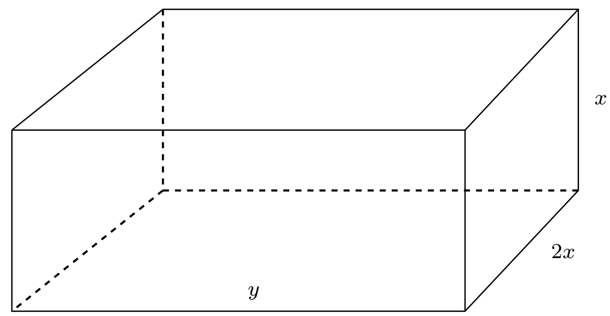
▼ Una gráfica posible de la función $f(x)$ es:



□

(4) Se quiere construir una cisterna con base rectangular y sin tapa, de manera tal que el ancho de la base sea el doble de la altura de la cisterna. Calcular las dimensiones que debe tener la cisterna para que el volumen sea de 20 m^3 y se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

▼



El volumen de la cisterna es área de la base $(2x \times y)$ por la altura (x) y es igual a 20 m^3 (dato que se proporciona).

$$V = (2xy)x = 2x^2y = 20. \tag{a}$$

El área total (cantidad mínima deseada)

$$A = 2x \times y + 2(2x \times x) + 2(x \times y) = 2xy + 4x^2 + 2xy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = 4xy + 4x^2. \tag{b}$$

Despejamos y en (a)

$$y = \frac{10}{x^2}\,. \tag{c}$$

Sustituyendo en (b) obtenemos:

$$A = 4x\left(\frac{10}{x^2}\right) + 4x^2 = \frac{40}{x} + 4x^2.$$

Derivando esta útima función:

$$A' = -\frac{40}{x^2} + 8x.$$

Calculamos la segunda derivada

$$A'' = 40\frac{2x}{x^4} + 8 = \frac{80}{x^3} + 8 > 0, \text{ pues } x > 0.$$

Tenemos entonces una curva cóncava hacia arriba, lo cual nos dice que el punto crítico que calculemos será un mínimo absoluto.

Para calcular los puntos críticos igualamos la primera derivada a cero

$$A' = 0 \Rightarrow -\frac{40}{x^2} + 8x = 0 \Rightarrow \frac{-40 + 8x^3}{x^2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -40 + 8x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{40}{8} = 5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}.$$

Sustituimos en (c) para ver la dimension del otro lado de la base de la caja:

$$y = \frac{10}{(5^{\frac{1}{3}})^2} = 2\frac{5}{5^{\frac{2}{3}}} = 2 \times 5^{\frac{1}{3}} = 2x.$$

Concluimos entonces que las dimensiones de la caja con la mínima cantidad de material en su construcción son: base cuadrada de lado $2 \times 5^{\frac{1}{3}}$ y de alto $5^{\frac{1}{3}}$.

□

(5) Para la función

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 - x^2},$$

determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia abajo y hacia arriba. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

▼ Vamos a derivar dos veces la función $f(x)$

$$f'(x) = 2\frac{(1 - x^2)2x - x^2(-2x)}{(1 - x^2)^2} = 2\frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1 - x^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4\frac{x}{(1 - x^2)^2}. \tag{*}$$

De aquí calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 4\frac{(1 - x^2)^2 \times 1 - x \times 2(1 - x^2)(-2x)}{(1 - x^2)^4} = 4\frac{(1 - x^2)\left[(1 - x^2) + 4x^2\right]}{(1 - x^2)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 4\frac{1 + 3x^2}{(1 - x^2)^3}. \tag{**}$$

La función $f(x)$ está definida en todos los reales excepto en la raíces del denominador $1 - x^2$:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |\,x\,| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o bien } x = -1.$$

De aquí concluimos que:
Dominio de la función $= D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
Las raíces de $f(x)$ son las raíces de su numerador

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

La raíz de $f(x)$: $x = 0$.
Las asíntotas verticales de $f(x)$ vienen dadas por los ceros o raíces del denominador que no son ceros del numerador, en este caso:
Las asíntotas verticales de $f(x)$: $x = -1$ & $x = 1$.
Para las asíntotas horizontales calculamos

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} 2\frac{x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2} - 1} = -2.$$

Así: $y = -2$ es la asíntota horizontal de $f(x)$.

Para calcular los puntos críticos usamos $(*)$.
Las raíces de $f'(x)$ son las raíces de su numerador

$$x = 0 \text{ punto crítico de } f(x).$$

De la expresión $(*)$ vemos que el signo de la derivada nos lo proporciona el numerador x. Por lo que concluimos que:
La función crece en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$.
La función decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$.
También obtenemos de aquí que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo.

Para calcular los puntos de inflexión usamos $(**)$ y, puesto que el numerador $1+3x^2>0$, concluimos que la función no tiene puntos de inflexión, no existen ceros de la segunda derivada.
El signo de la segunda derivada nos lo proporciona el denominador $(1-x^2)^3$, pero esta expresión tiene el mismo signo que $g(x)=1-x^2$. Usamos por tanto esta expresión. Las raíces son -1 y también 1. Si evaluamos en puntos intermedios apropiados obtenemos

$$\begin{cases} g''(-2) = 1-(-2)^2 < 0 \\ g''(0) = 1-0^2 > 0 \\ g''(2) = 1-2^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g''(x) < 0 \text{ en } (-\infty,-1) \\ g''(x) > 0 \text{ en } (-1,1) \\ g''(x) < 0 \text{ en } (1,+\infty)\,. \end{cases}$$

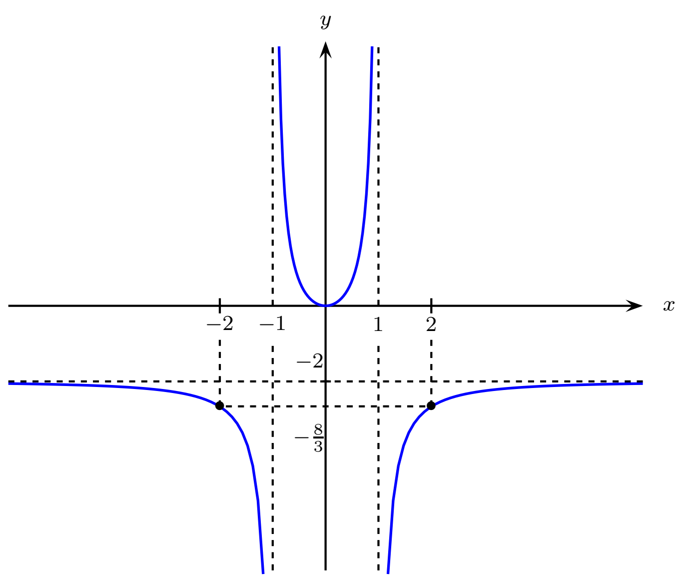
Esto nos dice que:
La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)\,$.
La función es cóncava hacia arriba en $(-1,1)$.
Con toda la información anterior estamos listos para dar un bosquejo de la gráfica. Para ayudarnos, vamos a evaluar la función $f(x)$ en dos puntos, notando que $f(x)$ es par:

$$f(2)=f(-2)=\frac{2(-2)^2}{1-(-2)^2}=\frac{8}{1-4}=-\frac{8}{3}\,.$$

También notemos que:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{2x^2}{(1+x)(1-x)} = \mp\infty = \lim_{x\to -1^{\mp}} f(x).$$

La gráfica de la función $f(x)$ es:



$\square$