CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E0100

(1) Cierto artículo de lujo se vende en 1 000 pesos. La cantidad de ventas es de 20 000 artículos al año. Se considera imponer un impuesto a las ventas de tales artículos. Si el nivel del impuesto se fija en $R\%$, las ventas caerán en $500R$ artículos al año, ¿qué valor de R dará un ingreso total al gobierno de 1 680 000 pesos al año por concepto de este impuesto? ¿Qué valores de R darán al gobierno un ingreso de al menos 1 920 000 pesos al año?

(2) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - \sqrt{40 - 12x}}{3x^2 + x - 14} & \text{si } |\,x\,| \leq 3, x \neq 2, x \neq -\dfrac{7}{3} \\ a & \text{si } x = 2\,. \end{cases}$$

¿Para qué valores de a la función es continua en $x = 2$?

(3) Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{x}{x^2 - 9}$$

determine:

(a) Dominio y raíces
(b) Asíntotas horizontales y verticales
(c) Bosquejo gráfico

(4) Un controlador aéreo sitúa 2 aviones a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto de encuentro (ver figura). Uno de ellos (avión 1) está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 millas por hora. El otro (avión 2) está a 200 millas del punto y vuela a 600 millas por hora.

(a) ¿A qué velocidad decrece la distancia entre los aviones?
(b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias diferentes?

(5) Grafique la función $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x+3)$
señalando claramente:

(a) Dominio y raíces
(b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
(c) Máximos y mínimos relativos
(d) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo
(e) Puntos de inflexión
(f) Máximos y mínimos absolutos (si los hubiese)
(g) Gráfica de la función

(6) Una lata de aceite tiene la forma de un cilindro con fondo plano en la base y una semiesfera en la parte superior. Si esta lata debe contener un volumen de 1 000 pulgadas cúbicas y se desprecia el espesor del material, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Cierto artículo de lujo se vende en $1\,000$ pesos. La cantidad de ventas es de $20\,000$ artículos al año. Se considera imponer un impuesto a las ventas de tales artículos. Si el nivel del impuesto se fija en $R\%$, las ventas caerán en $500R$ artículos al año, ¿qué valor de R dará un ingreso total al gobierno de $1\,680\,000$ pesos al año por concepto de este impuesto? ¿Qué valores de R darán al gobierno un ingreso de al menos $1\,920\,000$ pesos al año?

▼ El total de artículos que se venden cobrando $R\%$ de impuesto es $20\,000 - 500R$; el precio de venta de estos artículos es $1\,000\,(20\,000 - 500R)$. El impuesto que se paga por esta venta es

$$1\,000\,(20\,000 - 500R) \times \frac{R}{100} = 1\,680\,000, \text{ según lo enunciado,}$$

o sea

$$200R - 5R^2 = 1\,680 \Rightarrow R^2 - 40R + 336 = 0.$$

Resolvemos esta cuadrática

$$R = \frac{40 \pm \sqrt{1\,600 - 4 \times 336}}{2} = \frac{40 \pm 16}{2} = \begin{cases} 28 \\ 12\,. \end{cases}$$

Existen dos soluciones para el impuesto: 28% y 12%.

Para resolver la segunda pregunta, hacemos el mismo planteamiento y nos queda la desigualdad

$$1\,000\,(20\,000 - 500R) \times \frac{R}{100} \geq 1\,920\,000,$$

o sea,

$$200R - 5R^2 \geq 1\,920 \Rightarrow R^2 - 40R + 384 \leq 0.$$

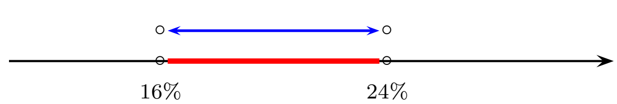
Vamos a calcular las raíces de la cuadrática

$$R = \frac{40 \pm \sqrt{1\,600 - 4 \times 384}}{2} = \frac{40 \pm 8}{2} = \begin{cases} 24 \\ 16\,. \end{cases}$$

Tenemos entonces $R^2 - 40R + 384 = (R - 16)(R - 24)$. Para saber dónde la cuadrática es negativa usamos la tabla

	Signo de		
Intervalo	$R - 16$	$R - 24$	$R^2 - 40R + 384$
$R < 16\,(< 24)$	$-$	$-$	$+$
$16 < R < 24$	$+$	$-$	$-$
$R > 24\,(> 16)$	$+$	$+$	$+$

Vemos entonces que cobrando un impuesto en el rango de 16% a 24% se obtiene una ganancia no menor que la deseada.



□

(2) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - \sqrt{40 - 12x}}{3x^2 + x - 14} & \text{si } |\, x \,| \leq 3, x \neq 2, x \neq -\dfrac{7}{3} \\ a & \text{si } x = 2\,. \end{cases}$$

¿Para qué valores de a la función es continua en $x = 2$?

▼ Para que la función sea continua en $x = 2$, se debe cumplir

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = a\,.$$

Si tratamos de calcular el límite por evaluación obtenemos:

$$\frac{4 - \sqrt{40 - 24}}{3 \times 4 + 2 - 14} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{es decir, una indeterminación} \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Primero vamos a trabajar el denominador de $f(x)$. Puesto que es un polinomio de segundo grado que tiene como cero o raíz a $x = 2$, sabemos que $x - 2$ divide al polinomio. Para saber la factorización correspondiente hacemos la siguiente división:

$$\begin{array}{r|l} & 3x + 7 \\ \hline x - 2 & 3x^2 + x - 14 \\ & \underline{-3x^2 + 6x} \\ & \qquad 7x \\ & \qquad \underline{-7x + 14} \\ & \qquad\quad 0\,. \end{array}$$

Tenemos entonces que $3x^2 + x - 14 = (x - 2)(3x + 7)$.

Un poco de álgebra:

$$\begin{aligned} \frac{2x - \sqrt{40 - 12x}}{3x^2 + x - 14} &= \frac{2x - \sqrt{40 - 12x}}{(x - 2)(3x + 7)} \times \left(\frac{2x + \sqrt{40 - 12x}}{2x + \sqrt{40 - 12x}}\right) = \\ &= \frac{4x^2 - (40 - 12x)}{(x - 2)(3x + 7)(2x + \sqrt{40 - 12x})} = \\ &= \frac{4x^2 + 12x - 40}{(x - 2)(3x + 7)(2x + \sqrt{40 - 12x})} = \\ &= 4\frac{x^2 + 3x - 10}{(x - 2)(3x + 7)(2x + \sqrt{40 - 12x})} = \\ &= 4\frac{(x + 5)(x - 2)}{(x - 2)(3x + 7)(2x + \sqrt{40 - 12x})} = \\ &= 4\frac{x + 5}{(3x + 7)(2x + \sqrt{40 - 12x})}, \quad x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2\,. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular el límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(4\frac{x + 5}{(3x + 7)(2x + \sqrt{40 - 12x})}\right) &= \\ = \frac{4 \times 7}{13 \times 8} = \frac{7}{26} = f(2) = a, &\quad \text{sí cumple la condición deseada.} \end{aligned}$$

$\square$

(3) Para la siguiente función
$$f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{x}{x^2-9}$$
determine:

(a) Dominio y raíces

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

Raíces. Vemos que:
$$f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{x}{x^2-9} = \frac{2x+3}{x^2-9};$$
la raíz de la función es $x = -\dfrac{3}{2}$.

(b) Asíntotas horizontales y verticales

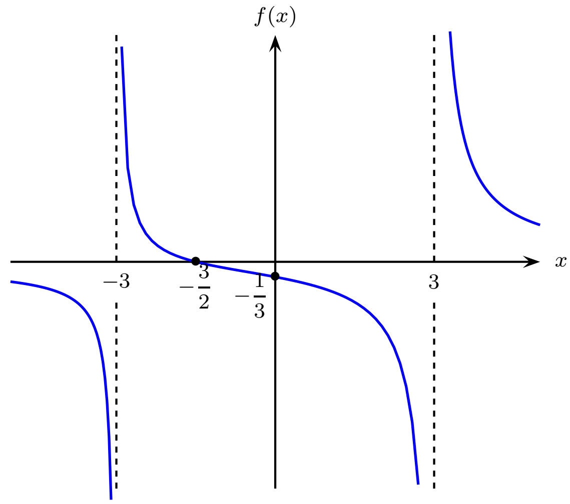
▼ Puesto que
$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)} = \frac{2+\dfrac{3}{x}}{x\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)}, \quad x \neq 0$$
calculamos:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{3}{x}}{x\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)} = 0;$$
entonces, $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Se tiene también que $x = -3$ y $x = 3$ son las asíntotas verticales.
Vamos a calcular los límites laterales en esos puntos:

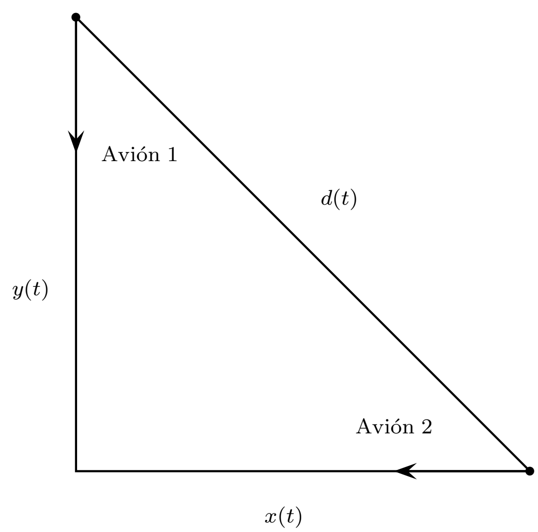
Primero $x = -3$.
Si $x \to -3^- \Rightarrow x < -3 \Rightarrow x + 3 < 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^-$, entonces:
$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^-} \left(\frac{2x+3}{x-3} \times \frac{1}{x+3}\right) = \frac{-3}{-6} \times \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”} = -\infty.$$
Si $x \to -3^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^+$, entonces:
$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^+} \left(\frac{2x+3}{x-3} \times \frac{1}{x+3}\right) = \frac{-3}{-6} \times \text{“}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{”} = +\infty.$$
Segundo $x = 3$
Si $x \to 3^- \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow x - 3 \to 0^-$, entonces:
$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} \left(\frac{2x+3}{x+3} \times \frac{1}{x-3}\right) = \frac{9}{6} \times \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”} = -\infty.$$
Si $x \to 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow x - 3 \to 0^+$, entonces:
$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} \left(\frac{2x+3}{x+3} \times \frac{1}{x-3}\right) = \frac{9}{6} \times \text{“}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{”} = +\infty.$$

(c) Bosquejo gráfico

▼ Con toda la información anterior tenemos que el bosquejo gráfico de $f(x)$ es:



(4) Un controlador aéreo sitúa 2 aviones a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto de encuentro (véase figura). Uno de ellos (avión 1) está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 millas por hora. El otro (avión 2) está a 200 millas del punto y vuela a 600 millas por hora.



(a) ¿A qué velocidad decrece la distancia entre los aviones?

▼ En todo momento, t arbitrario, se tiene la relación:

$$d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)\,;$$

derivando con respecto a t:

$$2d(t)d'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

y despejando $d'(t)$:

$$d'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}\,.$$

Si escribimos como t_0 el instante al que se refiere el enunciado, tenemos que:

$$d'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} =$$

$$= \frac{200 \times (-600) + 150 \times (-450)}{\sqrt{(200)^2 + (150)^2}} = \frac{-187500}{250} = -750 \text{ millas/h.}$$

(b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias diferentes?

▼ El tiempo que tienen los aviones para llegar al punto $(0, 0)$ es

$$\frac{200}{600} = \frac{1}{3} \text{ hora}, \ \frac{150}{450} = \frac{1}{3} \text{ hora.}$$

Es decir, los aviones chocarían en 20 minutos si no se cambia la trayectoria.

(5) Grafique la función $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x+3)$, señalando claramente:

(a) Dominio y raíces

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.
Raíces: $x = 0$ y $x = -3$.

(b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

▼ Derivamos para conocer los intervalos de monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}(x+3) + x^{\frac{1}{5}} = \frac{x+3+5x}{5x^{\frac{4}{5}}} =$$
$$= \frac{6x+3}{5x^{\frac{4}{5}}} = \frac{3}{5} \times \frac{2x+1}{x^{\frac{4}{5}}}.$$

El signo de la primera derivada lo da $2x+1$. Vemos que
$x = -\dfrac{1}{2}$ es un punto crítico;
$f(x)$ es decreciente si $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$;
$f(x)$ es creciente si $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

(c) Máximos y mínimos relativos

▼ Por lo anterior $x = -\dfrac{1}{2}$ es un mínimo local, por el criterio de la primera derivada.

(d) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo

▼ Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{3}{5}\left[\frac{x^{\frac{4}{5}} \times 2 - (2x+1) \times \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}}{x^{\frac{8}{5}}}\right] = \frac{6}{5} \times \frac{x^{\frac{4}{5}} - \dfrac{4x+2}{5x^{\frac{1}{5}}}}{x^{\frac{8}{5}}} =$$
$$= \frac{6}{5} \times \frac{\dfrac{5x-4x-2}{5x^{\frac{1}{5}}}}{x^{\frac{8}{5}}} = \frac{6}{25} \times \frac{x-2}{x^{\frac{9}{5}}} =$$
$$= \frac{6}{25} \times \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} \times \frac{x-2}{x};$$

vemos entonces que x & $x-2$ son los que dan el signo de la segunda derivada. Puesto que se anulan en $x = 0$ y en $x = 2$, nos ayudamos de la tabla siguiente para conocer los intervalos de concavidad de la función $f(x)$

	Signo de		
Intervalo	x	$x-2$	$f''(x)$
$x < 0\,(< 2)$	$-$	$-$	$+$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$-$
$x > 2\,(> 0)$	$+$	$+$	$+$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \bigcup (2, +\infty)$;
$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(0, 2)$.

(e) Puntos de inflexión

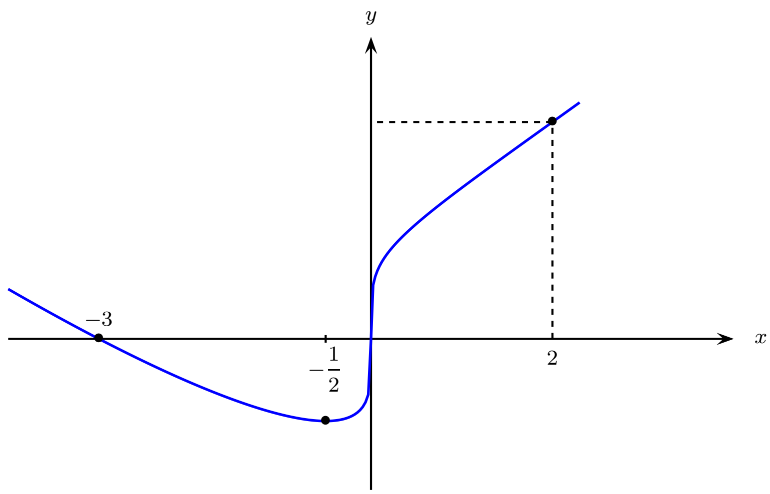
▼ Por lo anterior, en $x = 2$ cambia la concavidad, y por lo tanto es un punto de inflexión.

(f) Máximos y mínimos absolutos (si los hubiese)

▼ En $x = -\dfrac{1}{2}$ tiene un mínimo absoluto;
$f(x)$ no tiene máximo absoluto.

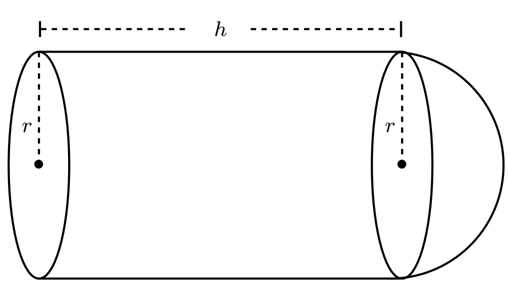
(g) Gráfica de la función

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



(6) Una lata de aceite tiene la forma de un cilindro con fondo plano en la base y una semiesfera en la parte superior. Si esta lata debe contener un volumen de 1 000 pulgadas cúbicas y se desprecia el espesor del material, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla.

▼ Usamos la figura



El volumen total consta de dos partes: el volumen del cilindro más el volumen de la semiesfera:

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 1\,000. \tag{A}$$

El material usado coincide con el área total de la superfice exterior que consta del área de la base, más el área lateral del cilindro y el área de la semiesfera:

$$M = \pi r^2 + 2\pi r h + \frac{1}{2} \times 4\pi r^2. \tag{B}$$

Ésta es la función a la cual deseamos minimizar. Consta de dos variables. De la relación (A) despejamos h:

$$\pi r^2 h = 1\,000 - \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow h = \frac{1\,000}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r\,. \tag{C}$$

Sustituimos este valor en (B) y obtenemos:

$$\begin{aligned} M(r) &= \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1\,000}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r\right) + 2\pi r^2 = \\ &= 3\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} - \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}\,. \end{aligned}$$

Calculamos primera y segunda derivada:

$$\begin{aligned} M'(r) &= \frac{5}{3}\pi 2r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{10\pi r^3 - 6\,000}{3r^2} \\ M''(r) &= \frac{10}{3}\pi + 2\,000\frac{2r}{r^4} = \frac{10}{3}\pi + 4\,000\frac{1}{r^3} > 0, \quad \text{mínimo.} \end{aligned}$$

Calculamos puntos críticos igualando a cero la primera derivada:

$$M'(r) = 0 \Rightarrow 10\pi r^3 - 6\,000 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{600}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}} = \left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5.75882\,.$$

Sustituyendo este valor en (C):

$$\begin{aligned} h &= \frac{1\,000}{\pi\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1\,000}{600} \times \frac{600}{\pi\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{5}{3}\frac{\left(\frac{600}{\pi}\right)}{\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= \left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = r, \end{aligned}$$

es decir, hallamos que la lata con las condiciones dadas debe tener la altura del cilindro igual que el radio de la base.

□