CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E1000

(1) Una pelota se deja caer desde un edificio. La posición de la pelota en cualquier instante t (medido en segundos) está dada por $s(t) = 122.5 - 4.9t^2$, medida en metros, $t \geq 0$.
   (a) Dar la altura del edificio
   (b) ¿En qué intervalo de tiempo la pelota está por lo menos a 113 m sobre el suelo?

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{-\sqrt{x+4} + 2} \right)$.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

(4) Sea la función

$$g(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \leq -1 \\ at^2 + bt + 1 & \text{si } -1 < t < 2 \\ \frac{3}{2}t & \text{si } t \geq 2\,. \end{cases}$$

   (a) Encontrar las valores de a, b para que la función $g(t)$ sea continua en todos los reales
   (b) Con los valores encontrados, dar la gráfica de la función

(5) Derivar la función $f(x) = \sqrt{9 + (x+1)^2} + \dfrac{3x}{x^2 - 1}$.

(6) Existe una función $y = f(x)$ definida implícitamente por la expresión:

$$x^2 + xy + y^3 = \frac{1}{8}\,.$$

Encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, \frac{1}{2})$.

(7) Sea l la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitud x, y respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de $\frac{1}{2}$ m/s y si y disminuye con una rapidez de $\frac{1}{4}$ m/s,
   (a) ¿A qué razón está cambiando la longitud de la diagonal cuando $x = 3$ m & $y = 4$ m?
   (b) ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?

(8) La suma del perímetro de un círculo y un cuadrado es de 16 cm. Hallar las dimensiones de las dos figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras.

(9) Sea la función $h(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$.
   (a) Encontrar las raíces de $h(x)$
   (b) Encontrar los puntos críticos. Encontrar los intervalos de monotonía
   (c) Encontrar los puntos de inflexión. Encontrar los intervalos de concavidad
   (d) Clasificar los puntos críticos de $h(x)$
   (e) Dar un bosquejo de la gráfica

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Una pelota se deja caer desde un edificio. La posición de la pelota en cualquier instante t (medido en segundos) está dada por $s(t) = 122.5 - 4.9t^2$, medida en metros, $t \geq 0$.

(a) Dar la altura del edificio

▼ Está implícito que la pelota se suelta cuando $t = 0$. Así la altura del edificio es:

$$s(0) = 122.5 \text{ metros}$$

□

(b) ¿En qué intervalo de tiempo la pelota está por lo menos a 113 m sobre el suelo?

▼ La pregunta se traduce en resolver la desigualdad:

$$s(t) \geq 113,$$

o sea:

$$122.5 - 4.9t^2 \geq 113.$$

Resolviendo la desigualdad

$$122.5 - 113 \geq 4.9t^2 \Rightarrow 1.94 \approx \frac{9.5}{4.9} \geq t^2$$

y extrayendo la raíz cuadrada

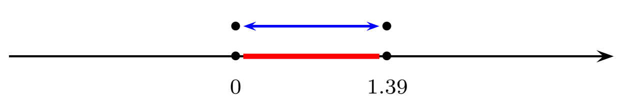
$$1.39 \geq |\, t \,|\,,$$

logramos la solución de esta desigualdad, es decir,

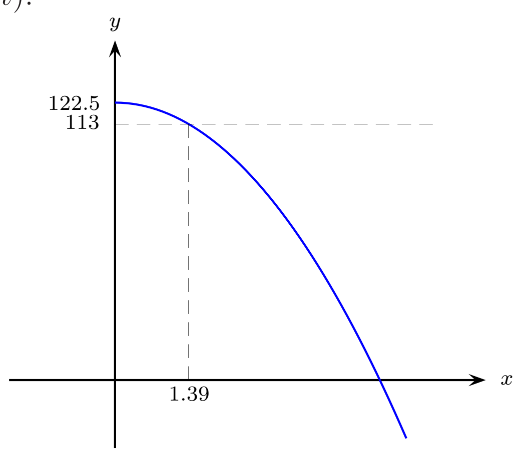
$$t \in [-1.39, +1.39]\,.$$

Pero tenemos que $t \geq 0$, por lo que la solución final es

$$t \in [0, 1.39]\,.$$



Si vemos la gráfica de la parábola $s(t)$:



La parábola se encuentra arriba de la recta $y = 113$ para $t \in [0, 1.39]$.

$\square$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2}\right)$.

▼ Si tratamos de calcular el límite por evaluación, resulta para $x = 0$:

$$\frac{\sqrt{0+1}-1}{-\sqrt{0+4}+2} = \frac{1-1}{-2+2} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{ una indeterminación de la forma “}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Por pasos, racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2} &= \frac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2}\,\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \\ &= \frac{(x+1)-1}{(\sqrt{x+1}+1)(2-\sqrt{x+4})} = \frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)(2-\sqrt{x+4})}\ .\end{aligned}$$

Si tratamos de evaluar, obtenemos de nuevo una indeterminación de la forma “$\left(\dfrac{0}{0}\right)$”.

Ahora, racionalizamos el denominador:

$$\begin{aligned}&\frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)(2-\sqrt{x+4})}\,\frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}} = \\ &= \frac{x(2+\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+1}+1)[4-(x+4)]} = \frac{x(2+\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+1}+1)(-x)} = -\frac{2+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}+1}\ .\end{aligned}$$

Podemos ya calcular el límite usando esta expresión equivalente, para $x \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}+1}\right) = -\frac{2+2}{1+1} = -\frac{4}{2} = -2.$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

▼ Transformamos la expresión

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x}-x &= (\sqrt{x^2+x}-x)\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \\ &= \frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\end{aligned}$$

y dividiendo entre x numerador y denominador:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}$$

podemos calcular el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

(4) Sea la función

$$g(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \le -1 \\ at^2+bt+1 & \text{si } -1 < t < 2 \\ \frac{3}{2}t & \text{si } t \ge 2\,. \end{cases}$$

(a) Encontrar las valores a, b para que la función $g(t)$ sea continua en todos los reales

▼ Las fronteras de los “pedazos” que definen la función son $t=-1$ & $t=2$. Se ve claramente que los tres “pedazos” son funciones continuas. Para la continuidad en todos los reales se debe cumplir:

$$\lim_{t\to-1^-} g(t) = \lim_{t\to-1^+} g(t) = g(-1) \ \& \ \lim_{t\to 2^-} g(t) = \lim_{t\to 2^+} g(t) = g(2).$$

Esto se traduce en

$$\begin{aligned} 3 &= a-b+1 \\ 4a+2b+1 &= 3\,. \end{aligned}$$

Ordenamos estas condiciones

$$\begin{aligned} a-b &= 2 \\ 4a+2b &= 2\,. \end{aligned}$$

Resolvemos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -1\,. \end{aligned}$$

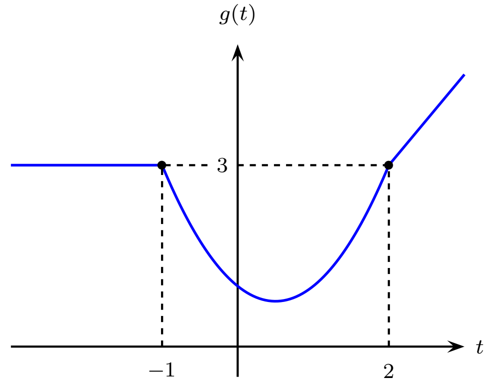
□

(b) Con los valores encontrados, dar la gráfica de la función

▼ Con estos valores la función es

$$g(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \le -1 \\ t^2-t+1 & \text{si } -1 < t < 2 \\ \frac{3}{2}t & \text{si } t \ge 2 \end{cases}$$

y la gráfica de la función $g(t)$ es



$\square$

(5) Derivar la función $f(x) = \sqrt{9 + (x+1)^2} + \dfrac{3x}{x^2 - 1}$.

▼ Derivamos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9 + (x+1)^2}}[2(x+1)] + 3\frac{(x^2-1)(1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{x+1}{\sqrt{9+(x+1)^2}} + 3\frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{x+1}{\sqrt{9+(x+1)^2}} + 3\frac{-x^2 - 1}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{x+1}{\sqrt{9+(x+1)^2}} - 3\frac{x^2 + 1}{(x^2-1)^2} \; .$$

$\square$

(6) Existe una función $y = f(x)$ definida implícitamente por la expresión:

$$x^2 + xy + y^3 = \frac{1}{8}\,.$$

Encontrar la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, \frac{1}{2})$.

▼ Derivando:

$$2x + (xy' + 1 \times y) + 3y^2y' = 0 \Rightarrow (x + 3y^2)y' + (2x + y) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x + 3y^2)y' = -(2x + y) \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x + 3y^2}$$

y evaluando en el punto $(0, \frac{1}{2})$:

$$y'(0, \tfrac{1}{2}) = -\frac{\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}\,,$$

la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, \frac{1}{2})$ es

$$\frac{y - \frac{1}{2}}{x - 0} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\,.$$

$\square$

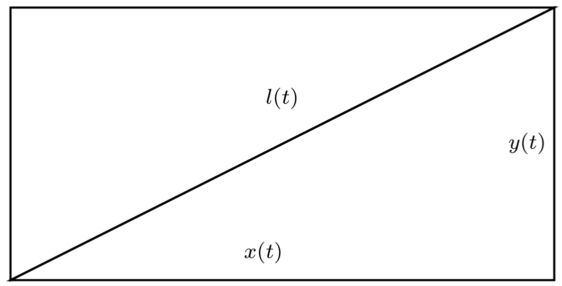
(7) Sea l la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitud x, y respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de $\frac{1}{2}$ m/s y si y disminuye con una rapidez de $\frac{1}{4}$ m/s,

(a) ¿a qué razón está cambiando la longitud de la diagonal cuando $x = 3$ m & $y = 4$ m?

▼ Ver lo que sigue.

(b) ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?

▼ Usamos la figura



De la figura, tenemos que:

$$l^2(t) = x^2(t) + y^2(t); \text{ entonces,}$$

derivando con respecto a t:

$$2l(t)l'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$
$$l'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{2l(t)} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{l(t)}\,.$$

Por lo tanto en el momento, digamos t_0, en el que $x(t_0) = 3$ & $y(t_0) = 4$, se tiene

$$l(t_0) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Por datos proporcionados, se tiene que $x'(t_0) = \frac{1}{2}$ & $y'(t_0) = -\frac{1}{4}$.

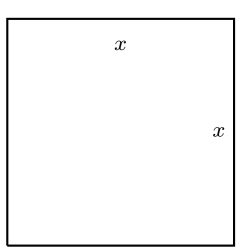
Sustituyendo estos datos obtenemos

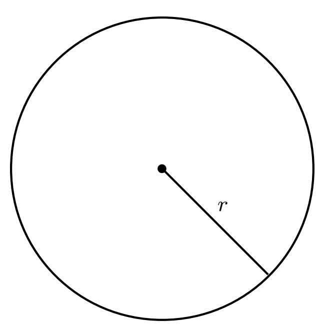
$$l'(t_0) = \frac{3(\frac{1}{2}) - 4(\frac{1}{4})}{5} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{5} = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10} > 0\,.$$

La longitud de la diagonal crece en ese momento.

(8) La suma del perímetro de un círculo y un cuadrado es de 16 cm. Hallar las dimensiones de las dos figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras.

▼ El dibujo de ambas figuras es:





De ambas tenemos:

El perímetro del círculo: $2\pi r$.
El perímetro del cuadrado: $4x$.
El perímetro de ambas figuras (usamos la restricción dada):

$$2\pi r + 4x = 16, \tag{*}$$

El área del círculo: πr^2.
El área del cuadrado: x^2.
El área de ambas figuras: $\pi r^2 + x^2$.
Ésta es la función de la que deseamos calcular el mínimo con la restricción dada.

$$A = \pi r^2 + x^2. \tag{**}$$

Esta función depende de dos variables. La relación entre estas variables viene dada por la condición $(*)$. De aquí despejamos una variable. Elegimos arbitrariamente r

$$r = \frac{16 - 4x}{2\pi} = \frac{8 - 2x}{\pi}\ . \tag{***}$$

Sustituimos en $(**)$

$$A(x) = \pi\left(\frac{8 - 2x}{\pi}\right)^2 + x^2 \Rightarrow A(x) = \frac{1}{\pi}(8 - 2x)^2 + x^2 \text{ y tenemos,}$$

derivando, con respecto a x:

$$A' = \frac{2}{\pi}(8 - 2x)(-2) + 2x = -\frac{4}{\pi}(8 - 2x) + 2x;$$

calculamos la segunda derivada:

$$A'' = -\frac{4}{\pi}(-2) + 2 = \frac{8}{\pi} + 2 > 0.$$

Esto no indica que la función A siempre es cóncava hacia arriba, es decir, vamos a encontrar un mínimo.

Igualamos a cero la primera derivada, para encontrar los puntos críticos:

$$-\frac{4}{\pi}(8 - 2x) + 2x = 0 \Rightarrow -\frac{4}{\pi}(8 - 2x) = -2x \Rightarrow 8 - 2x = \frac{\pi}{2}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8 = \frac{\pi}{2}x + 2x = (\frac{\pi}{2} + 2)x = \frac{\pi + 4}{2}x \Rightarrow x = \frac{16}{\pi + 4}\ .$$

Éste es el valor que hace mínima el área $A(x)$.

Para encontrar el valor de r correspondiente, sustituimos en $(***)$

$$r = \frac{1}{\pi}\left(8 - 2\frac{16}{\pi + 4}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi + 32 - 32}{\pi + 4}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi}{\pi + 4}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = \frac{8}{\pi + 4} = \frac{1}{2}x\ .$$

O sea, el lado del cuadrado es el doble del radio del círculo.

$\square$

(9) Sea la función $h(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$.

(a) Encontrar las raíces de $h(x)$

▼ Tenemos:

$$h(x) = x(2x^2 - 15x - 36).$$

Una de las raíces es $x = 0$.

Las raíces de la cuadrática $2x^2 - 15x - 36$ se calculan:

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4(2)(-36)}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 288}}{4} =$$
$$= \frac{15 \pm \sqrt{513}}{4} \approx \frac{15 \pm 22.6495}{4} \approx \begin{cases} 9.41238 \\ -1.91238\,. \end{cases}$$

(b) Encontrar los puntos críticos. Encontrar los intervalos de monotonía

▼ Derivamos:

$$h'(x) = 6x^2 - 30x - 36 = 6(x^2 - 5x - 6) = 6(x - 6)(x + 1).$$

Las raíces de la derivada son, claramente, $x = -1$ & $x = 6$.

Para el signo de la derivada usamos la tabla:

	Signo de		
Intervalo	$x + 1$	$x - 6$	$(x + 1)(x - 3)$
$x < -1\,(< 6)$	$-$	$-$	$+$
$-1 < x < 6$	$+$	$-$	$-$
$x > 6\,(> -1)$	$+$	$+$	$+$

Vemos entonces que:
$h(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(6, +\infty)$;
$h(x)$ es decreciente en $x \in (-1, 6)$.

(c) Encontrar los puntos de inflexión. Encontrar los intervalos de concavidad
▼ Calculamos la segunda derivada:

$$h''(x) = 12x - 30.$$

Los ceros o raíces de la segunda derivada se calculan de la siguiente forma:

$$12x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2.5\,.$$

Para calcular el signo de la segunda derivada tomamos puntos de muestra en cada uno de los intervalos en los cuales la recta real queda dividida por la raíz $x = 2.5$.

Intervalo	Muestra	Valor de $h'' = 12x - 30$
$x < 2.5$	0	-30
$x > 2.5$	10	90

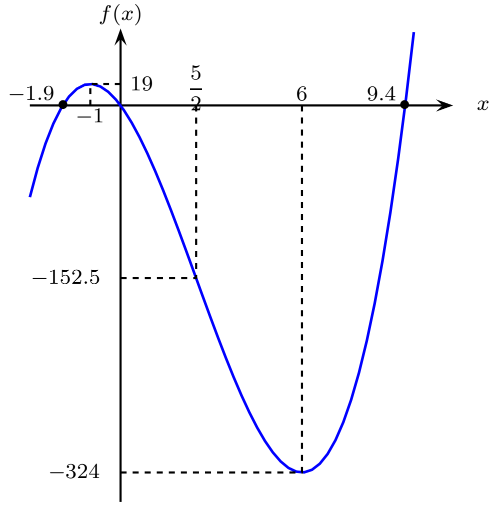
Vemos entonces que:
$h(x)$ es cóncava hacia abajo en $x \in (-\infty, 2.5)$;
$h(x)$ es cóncava hacia arriba en $x \in (2.5, +\infty)$.
El punto $[2.5, h(2.5)] = (2.5, -152.5)$ es de inflexión.

(d) Clasificar los puntos críticos de $h(x)$
▼ Si usamos el criterio de la primera derivada vemos que:
En $x = -1$ la primera derivada cambia de signo de más a menos, tenemos un máximo local. Vemos también que $h''(-1) = -46 < 0$ corrobora el resultado anterior.
En $x = 6$ la primera derivada cambia de signo de menos a más, tenemos un mínimo local. Vemos también que $h''(6) = 42 > 0$ corrobora el resultado anterior.

(e) Dar un bosquejo de la gráfica
▼ Evaluamos la función $h(x)$ en algunos puntos:

x	$h(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$
-1	19
6	-324

Con toda la información anterior podemos hacer un bosquejo de la gráfica de la función $h(x)$:



$f(x)$
x
-1.9
-1
19
$\frac{5}{2}$
6
9.4
-152.5
-324