CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E1100
00P, 11-NOVIEMBRE 2000, 13H

(1) Determinar los valores de x para los cuales está definida la función $f(x) = \sqrt{4 - 9x^2}$ y obtener también el intervalo formado por las imágenes $f(x)$.

(2) Un taxista cobra 4.80 pesos por el banderazo que es el costo por subirse y recorrer menos de 500 m; pero cobra 0.65 pesos por cada tramo subsiguiente de 500 m (completo o parte). Expresar el costo C (en pesos) de un viaje como función de la distancia x recorrida (en kilómetros) para $0 < x < 3$ y graficar esta función.

(3) Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{2x^2 + x - 3}$,

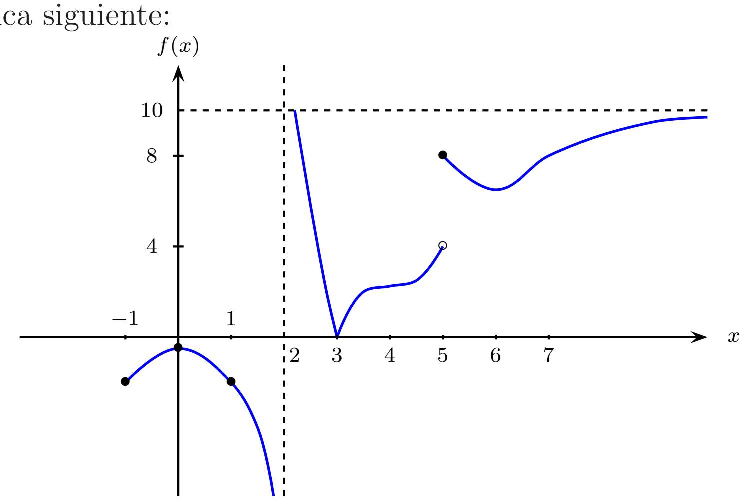
obtener: dominio y raíces; intervalos de continuidad y puntos de discontinuidad (clasificados); asíntotas verticales y horizontales.

(4) Se quiere construir una caja de base rectangular que sea tres veces más larga que ancha, que tenga tapa y que pueda contener 15 dm^3 de abono para plantas. Calcular las dimensiones que debe tener dicha caja para que requiera la menor cantidad de material en su construcción.

(5) Para la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$,

obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos, locales y absolutos; intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

(6) La función f tiene la gráfica siguiente:



De ella determinar: dominio, rango, raíces, intervalos de continuidad y discontinuidades (clasificadas); intervalos de monotonía y concavidades, puntos de inflexión; dónde f no es diferenciable (no tiene derivada); puntos críticos de f; clasificar estos puntos. Y además encontrar los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x); \quad \lim_{x\to 5^+} f(x); \quad \lim_{x\to 2^-} f(x); \quad \lim_{x\to 2^+} f(x); \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) \ \& \ f(1),\ f(2),\ f(5).$$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Determinar los valores de x para los cuales está definida la función $f(x) = \sqrt{4 - 9x^2}$ y obtener también el intervalo formado por las imágenes $f(x)$.

▼ Dominio de $f(x)$:

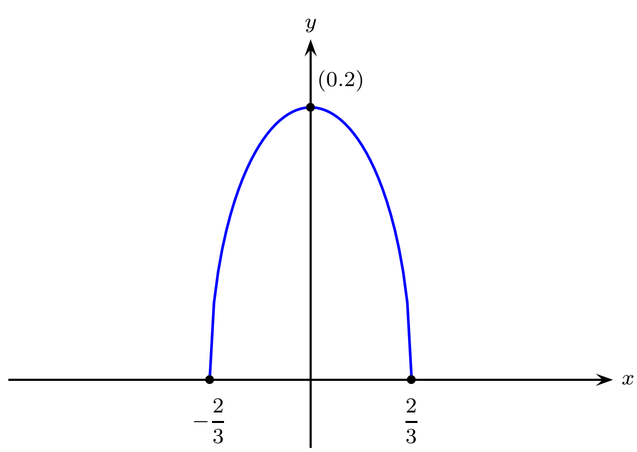
$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 4 - 9x^2 \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 4 \geq 9x^2 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{4}{9} \geq x^2 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2}{3} \geq |\, x \,| \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \right\} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right];$$

Rango de $f(x)$:

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{existe } x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] \text{ tal que } y = f(x) \right\} =$$
$$= \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{existe } x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] \text{ tal que } y = \sqrt{4 - 9x^2} \right\};$$

pero,

$$y = \sqrt{4 - 9x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - 9x^2 \Leftrightarrow 9x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1.$$



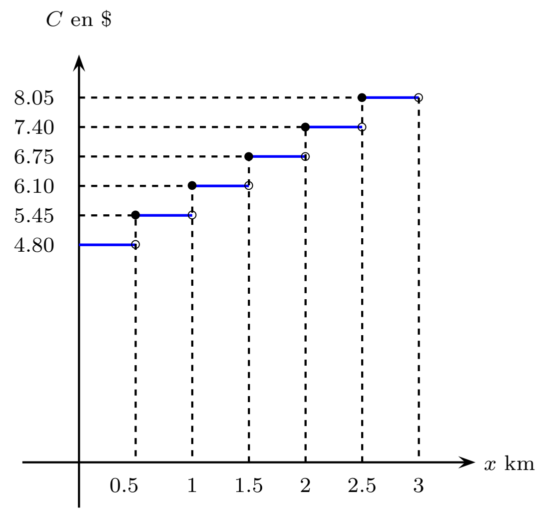
Por lo que, si $y = \sqrt{4 - 9x^2}$, el punto (x, y) está en la elipse con centro en el origen $(0, 0)$, cuyos ejes están sobre los ejes coordenados $x = 0$ & $y = 0$; dicha elipse tiene semieje mayor igual a 2 en el eje de las y; tiene semieje menor igual a $\dfrac{2}{3}$ en el eje de las x; ahora, como $y \geq 0$, se trata exclusivamente de la semielipse superior; por último, el conjunto de todas las imagenes $f(x)$ es el intervalo $[0, 2]$.

□

(2) Un taxista cobra 4.80 pesos por el banderazo que es el costo por subirse y recorrer menos de 500 m; pero cobra 0.65 pesos por cada tramo subsiguiente de 500 m (completo o parte). Expresar el costo C (en pesos) de un viaje como función de la distancia x recorrida (en kilómetros) para $0 < x < 3$ y graficar esta función.

▼ Vemos que

$$C(x) = \begin{cases} 4.80 \text{ si } 0 \le x < 0.5 \\ 5.45 \text{ si } 0.5 \le x < 1 \\ 6.10 \text{ si } 1 \le x < 1.5 \\ 6.75 \text{ si } 1.5 \le x < 2 \\ 7.40 \text{ si } 2 \le x < 2.5 \\ 8.05 \text{ si } 2.5 \le x < 3 \,. \end{cases}$$



Podríamos sintetizar esto diciendo que

$$C(x) = 4.8 + 0.65x, \text{ donde } \frac{1}{2}(n-1) \le x < \frac{n}{2}, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \,.$$

Claramente esta función se puede generalizar al caso en que $n \in \mathbb{N}$.

□

(3) Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{2x^2 + x - 3}$,

obtener: dominio y raíces; intervalos de continuidad y puntos de discontinuidad (clasificados); asíntotas verticales y horizontales.

▼ Dominio: $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x^2 + x - 3 \neq 0 \right\}$.

Pero, $2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \dfrac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{3}{2}\,; \end{cases}$

luego, $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{3}{2}, 1 \right\}$.

Para hallar las raíces resolvamos:

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \\ -2\,; \end{cases}$$

luego, las raíces serían $x = -\dfrac{3}{2}$ y también $x = -2$; pero, como $-\dfrac{3}{2} \notin D_f$, entonces la única raíz es $x = -2$.

La función es continua en su dominio: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \bigcup (1, +\infty)$; es discontinua en $x = -\frac{3}{2}$ y en $x = 1$. Ahora, como

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to-\frac{3}{2}} \frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+2)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)} = \lim_{x\to-\frac{3}{2}} \frac{x+2}{x-1} = \frac{-\frac{3}{2}+2}{-\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{-3+4}{2}}{\frac{-3-2}{2}} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5},$$

en $x = -\frac{3}{2}$ la discontinuidad no es esencial, es removible, a diferencia de lo que ocurre en $x = 1$, pues ahí:

$$\lim_{x\to1^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to1^{\pm}} \frac{x+2}{x-1} = \pm\infty;$$

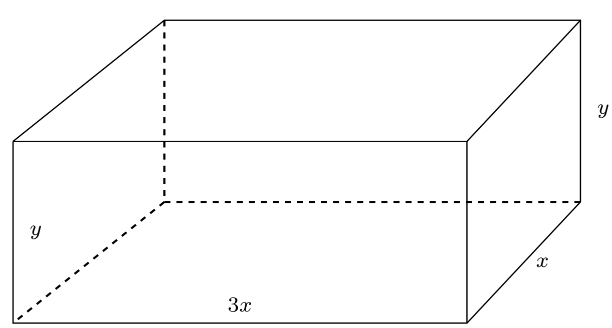
así, la discontinuidad en $x = 1$ es esencial, de hecho es infinita, y la recta $x = 1$ es asíntota vertical.
Para determinar las asíntotas horizontales calculamos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Luego la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

(4) Se quiere construir una caja de base rectangular que sea tres veces más larga que ancha, que tenga tapa y que pueda contener 15 dm^3 de abono para plantas. Calcular las dimensiones que debe tener dicha caja para que requiera la menor cantidad de material en su construcción.

▼ Hagamos un bosquejo de la caja:



$$V = 3x^2y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{3x^2} = 5x^{-2}.$$

La función de la que queremos hallar su mínimo es el área de la caja:

$$A = 2\times 3x^2 + 2\times xy + 2\times 3xy = 6x^2 + 8xy = 6x^2 + 8x5x^{-2} = 6x^2 + 40x^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A'(x) = 12x - \frac{40}{x^2} = \frac{12x^3 - 40}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{10}{3}} = \left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1.4938016 \,\&\, y = \frac{5}{\left(\frac{10}{3}\right)^{2/3}} =$$
$$= \frac{5\times 3^{2/3}}{5^{2/3}\times 2^{2/3}} = \frac{5^{1/3}\times 3^{2/3}}{2^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{5\times 9}{4}} = \sqrt[3]{\frac{45}{4}} \approx 2.2407024\,.$$

Como $A''(x) = 12 + 80x^{-3} = 12 + \dfrac{80}{x^3} > 0$, se trata de un mínimo para $A(x)$ y sucede cuando $x \approx 1.494$ & $y \approx 2.241$.

□

(5) Para la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$,

obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos, locales y absolutos; intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R}$, raíz $x = 0$, $f(x)$ es impar.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Veamos el signo de la derivada:

Intervalo	$(-\infty,-1)$,	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Valor de f' :	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$	$f'(2) < 0$
Signo de f' :	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
f es	decreciente	creciente	decreciente

También se puede ver directamente, pues el signo de $f'(x)$ nos lo da $1 - x^2$.
En $[-1, f(-1)] = \left(-1, \dfrac{-2}{1+1}\right) = (-1,-1)$ hay un mínimo local por el criterio de la primera derivada, y en $(1,1)$ hay un máximo local:

$$f''(x) = 2\frac{-2x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = 4\frac{-x(x^2+1) - 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} =$$
$$= 4\frac{-x^3 - x - 2x + 2x^3}{(x^2+1)^3} = 4\frac{x^3-3x}{(x^2+1)^3} = 4x\frac{x^2-3}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,\&\, x = \pm\sqrt{3}\,.$$

Análogamente, veamos el signo de $f''(x)$

Intervalo	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$,	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
Valor de f'' :	$f''(-2)<0$	$f''(-1)>0$	$f''(1)<0$	$f''(2)>0$
Signo de f'' :	$f''(x)<0$	$f''(x)>0$	$f''(x)<0$	$f''(x)>0$
f es	convexa	cóncava	convexa	cóncava

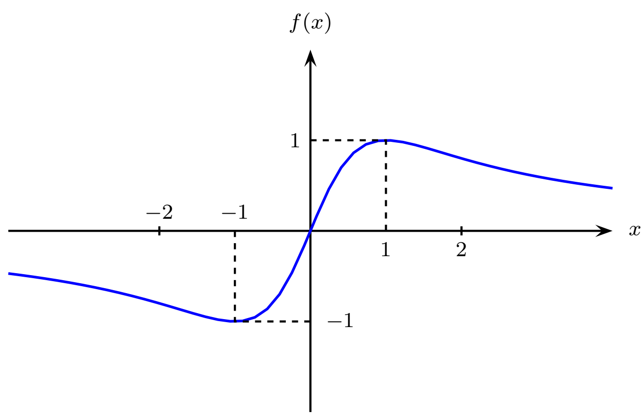
Tanto en

$\left[-\sqrt{3},f(-\sqrt{3})\right] = \left(-\sqrt{3},\dfrac{-2\sqrt{3}}{3+1}\right) = \left(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-1.7320508,-0.8660254)$, $(0,0)$ como en $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hay puntos de inflexión.

También

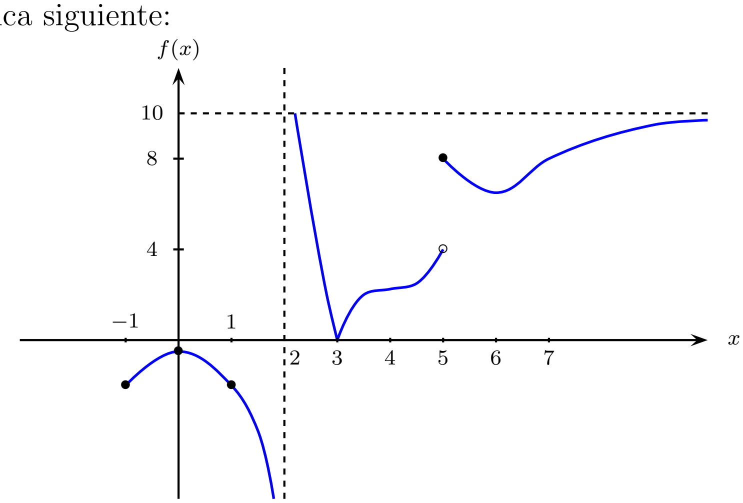
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{0^{\pm}}{1+0} = \frac{0^{\pm}}{1} = 0^{\pm}.$$

Con estos datos, la gráfica de la función $f(x)$ es la siguiente:



Resulta entonces que $(1,1)$ es el máximo absoluto; y que $(-1,-1)$ es el mínimo absoluto.

(6) La función f tiene la gráfica siguiente:



De ella determinar: dominio, rango, raíces, intervalos de continuidad y discontinuidades (clasificadas); intervalos de monotonía y concavidades, puntos de inflexión; dónde f no es diferenciable (no tiene derivada); puntos críticos de f; clasificar estos puntos. Y además encontrar los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x); \quad \lim_{x\to 5^+} f(x); \quad \lim_{x\to 2^-} f(x); \quad \lim_{x\to 2^+} f(x); \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) \ \& \ f(1),\ f(2),\ f(5).$$

▼ Dominio: $D_f = [-1, +\infty)$.

Rango: $R_f = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \bigcup (0, +\infty)$.

Raíces: $x = 3$ es raíz.

Es continua en $[-1, 1) \bigcup (1, 2) \bigcup (2, 5) \bigcup [5, +\infty)$; es discontinua en $x = 1$, donde la discontinuidad es removible; también en $x = 2$, donde tiene una discontinuidad esencial (infinita); por último, en $x = 5$, donde la discontinuidad igualmente es esencial.

Es creciente en $[-1, 0]\,, [3, 5]$ y $[6, +\infty)$ y decreciente en $[0, 1)\,, [1, 2)\,, (2, 3]$ y $[5, 6]$.

Es convexa en $(-1, 1)\,, (1, 2)\,, [3, 4]$ y $[6, +\infty)$ y cóncava en $(2, 3]\,, [4, 5)$ y $[5, 7]$.

Sus puntos de inflexión son $(3, 0)$, $(4, 1)$ y $(7, 8)$.

La función f no es derivable en $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ ni en $x = 5$.

Sus puntos críticos son $x = 0$, $x = 4$ & $x = 6$.

En $x = 0$ hay un máximo al igual que en $x = 5$; ambos locales.

En $x = 3$ y en $x = 6$ hay mínimos; ambos locales.

Los límites: $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 8$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $f(1) = 0$; $f(2) = 4$; $f(5) = 8$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ no existe.