CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E1200, 98I

(1) $|\,3 - x\,| > 2x^2 + 3\,.$

(2) Sea la función $y = (x^2 - 1)^2\sqrt{4 - x}\,.$

Encuentre la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica en el punto (0,2).

(3) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -2 \\ -ax + 2b & \text{si } \ |\,x\,| \le 2 \\ 3 - x^2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Encuentre valores a, b para que la función sea continua en todo punto.
Dar un bosquejo de la gráfica con estos valores.

(4) Un polinomio pasa por los puntos $(-5, 10)$, $(2, 3)$ y $(17, -1)$.
¿Cuántas raíces tiene como mínimo? Justifique su respuesta.

(5) Dada la función definida por $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, obtener: raíces, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

(6) Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - x - 6}\,.$

Encuentre su dominio, sus raíces. Clasifique sus discontinuidades. Encuentre sus asíntotas horizontales y verticales. Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Encuentre sus intervalos de concavidad. Haga un bosquejo de la gráfica.

(7) Se va a fabricar una lata cilíndrica sin tapa para contener 10 cm^3 de líquido. Encuentre las dimensiones que minimizarán el costo del metal requerido para fabricar la lata.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $|\,3 - x\,| > 2x^2 + 3\,.$

▼ Equivale a dos desigualdades:

$$3 - x > 2x^2 + 3 \text{ o bien } 3 - x < -(2x^2 + 3).$$

La primera, a su vez, equivale a $2x^2 + 3 - 3 + x < 0$, transponiendo términos, y ésta a $2x^2 + x < 0$.
Como $2x^2 + x = x(2x + 1)$, este producto es negativo si:

$$\begin{array}{llllllll} x > 0 & \text{y} & 2x + 1 < 0 & \text{o bien} & x < 0 & \text{y} & 2x + 1 > 0; \\ x > 0 & \text{y} & 2x < -1 & \text{o bien} & x < 0 & \text{y} & 2x > -1; \\ x > 0 & \text{y} & x < -\dfrac{1}{2} & \text{o bien} & x < 0 & \text{y} & x > -\dfrac{1}{2}; \\ & & x \in \emptyset & \text{o bien} & & x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right). & \end{array}$$

Luego, parte del conjunto solución de la desigualdad propuesta es el conjunto:

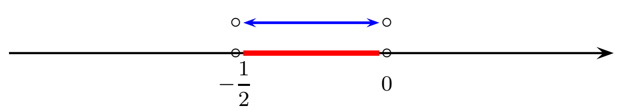
$$\emptyset \bigcup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

La otra parte la hallaremos resolviendo la otra desigualdad, análogamente:

$$3 - x < -(2x^2 + 3) \Leftrightarrow 2x^2 + 3 + 3 - x < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 6 < 0.$$

Sabemos que $2x^2 - x + 6 \neq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, pues el discriminante $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(6) < 0$.
Sabemos también que $y = 2x^2 - x + 6$ es una parábola que dirige su concavidad hacia la parte superior.
Con estas condiciones, la parábola tiene que estar forzosamente en la parte superior del eje de las x; y por lo tanto, $y = 2x^2 - x + 6 > 0$ para toda x.
Y, por último, el conjunto solución resultante es únicamente el intervalo

$$CS = \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$



Por ejemplo, $x = 0$ & $x = -\dfrac{1}{2}$ no satisfacen a la desigualdad propuesta pues:

$$|\,3 - 0\,| \not> 2(0)^2 + 3$$

y también: $\left|\,3 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\,\right| = \left|\,3 + \dfrac{1}{2}\,\right| = 3 + \dfrac{1}{2} \not> 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3 = 3 + \dfrac{2}{4} = 3 + \dfrac{1}{2}.$

□

(2) Sea la función $y = (x^2 - 1)^2\sqrt{4 - x}\,.$

Encuentre la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica en el punto (0,2).

▼ Calculamos la pendiente de la recta tangente usando la derivada:

$$y' = 2(x^2 - 1)2x\sqrt{4 - x} - \frac{(x^2 - 1)^2}{2\sqrt{4 - x}} = \frac{(x^2 - 1)[8x(4 - x) - (x^2 - 1)]}{2\sqrt{4 - x}} =$$

$$= \frac{(x^2 - 1)(32x - 8x^2 - x^2 + 1)}{2\sqrt{4 - x}} = \frac{(x^2 - 1)(-9x^2 + 32x + 1)}{2\sqrt{4 - x}}$$

y en $x=0$ la pendiente de la recta tangente es entonces:

$$y'(0)=\frac{-1}{2\sqrt{4-0}}=\frac{-1}{2\sqrt{4}}=-\frac{1}{2\times 2}=-\frac{1}{4}$$

y la ecuación de la recta tangente en el punto (0,2) será:

$$y-2=-\frac{1}{4}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+2.$$

La pendiente de la recta normal es 4 y la ecuación de la recta normal en el punto (0,2) es:

$$y-2=4(x-0)\Rightarrow y=4x+2.$$

(3) Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<-2\\ -ax+2b & \text{si } \mid x\mid\le 2\\ 3-x^2 & \text{si } x>2.\end{cases}$$

Encuentre valores a, b para que la función sea continua en todo punto.

▼ En los únicos puntos donde podría no ser continua f es en -2 y en 2. Para que sea continua en ellos se tiene que cumplir

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2) \text{ y que } \lim_{x\to -2}f(x)=f(-2)$$

y para ello se tiene que cumplir

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=-2a+2b;\ \lim_{x\to -2^+}f(x)=\lim_{x\to -2^-}f(x)=2a+2b.$$

Como:

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=3-(2)^2=3-4=-1,\ \lim_{x\to 2^-}f(x)=-2a+2b,$$

se tiene que cumplir $-2a+2b=-1$.

Análogamente:

$$\lim_{x\to -2^+}f(x)=2a+2b,\ \lim_{x\to -2^-}f(x)=\frac{1}{-2+1}=\frac{1}{-1}=-1;$$

luego, $2a+2b=-1$.

Resolvamos pues el sistema $\begin{cases}-2a+2b=-1\\ 2a+2b=-1\end{cases}$ sumando ambas ecuaciones lineales con dos incógnitas; tenemos:

$4b=-2\Rightarrow b=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$ y, sustituyendo este valor en la segunda ecuación, tenemos:

$2a-1=-1\Rightarrow 2a=0\Rightarrow a=\dfrac{0}{2}=0.$

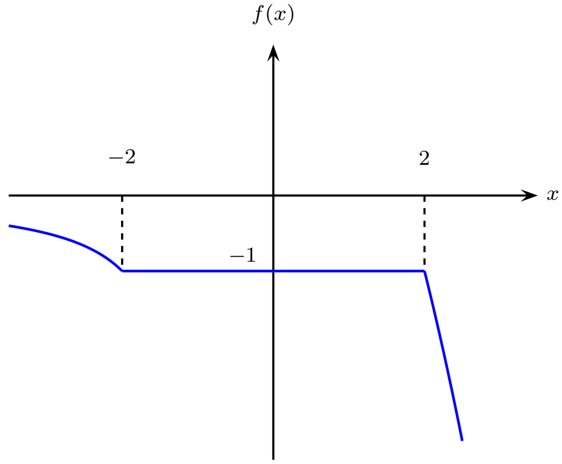
□

Dar un bosquejo de la gráfica con estos valores

▼ La función con estos valores es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<-2\\ -1 & \text{si } \mid x\mid\le 2\\ 3-x^2 & \text{si } x>2\,.\end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)$ es:



Es decir, unimos los dos segmentos de la parábola $y = 3 - x^2$ y de la hipérbola $y = \dfrac{1}{x+1}$ con un segmento de la recta $y = -1$.

$\square$

(4) Un polinomio pasa por los puntos $(-5, 10)$, $(2, 3)$ y $(17, -1)$.
¿Cuántas raíces tiene como mínimo? Justifique su respuesta.

▼ Una, pues siendo continua en toda la recta, la función polinomial $p(x)$ es positiva en 2 puesto que $p(2) = 3$; y es negativa en 17 ya que $p(17) = -1$; por lo que entre 2 y 17 la función tiene al menos una raíz, por el teorema del Valor Intermedio.

$\square$

(5) Dada la función definida por $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, obtener: raíces, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

▼ Calculemos:

$$3x^5 - 5x^3 = x^3(3x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \ \& \ 3x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \& \ x^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \& \ |\,x\,| = \sqrt{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x = 0 \ \& \ x \approx \pm 1.2909944\,.$$

Éstas son las raíces de f que concuerdan con el hecho de que $f(x)$ es impar.

Para determinar los intervalos de crecimiento se deriva f:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \ \& \ x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \& \ (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \& \ x = \pm 1.$$

Estos tres puntos críticos $-1, 0$ & 1 dividen la recta en cuatro intervalos donde la derivada tiene los siguientes signos:
Eligiendo arbitrariamente $\pm 2 \in (-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$ se tiene que $f'(\pm 2) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.

Análogamente, eligiendo $\pm\dfrac{1}{2} \in (-1, 0) \bigcup (0, 1)$ se ve que $f'\left(\pm\dfrac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$.

En $x = -1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente por lo que

$$[-1, f(-1)] = [-1, 3(-1)^5 - 5(-1)^3] = (-1, -3 + 5) = (-1, 2)$$

es un máximo relativo;

$(1, -2)$ es un mínimo relativo.

Siendo $f(x)$ decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, en (0,0) la función no tiene valor extremo.

Para la concavidad se deriva nuevamente:

$$f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \& \ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.7071067\,.$$

Se determina el signo de la segunda derivada en los cuatro intervalos donde la segunda derivada no es cero: En $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, eligiendo $-1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, se tiene que $f''(-1) < 0$; luego, $f(x)$ dirige su concavidad hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

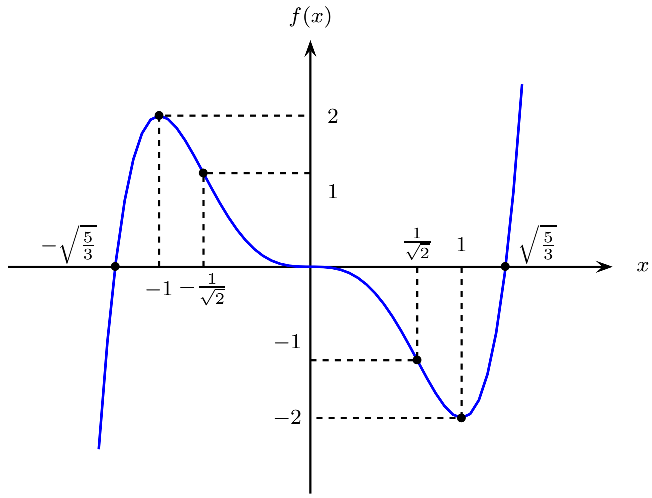
Y en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, la dirige hacia arriba.
En $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $-\frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$; luego, $f(x)$ dirige su concavidad hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Y en cambio, la dirige hacia abajo en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Los tres puntos:

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 - 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right] \approx \\
&\approx \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -0.5303301 + 1.767767\right) \approx (-0.7071067, 1.2374369) \\
[0, f(0)] &= (0, 0) \text{ y} \\
\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] &\approx (0.7071067, -1.2374369)
\end{aligned}$$

son de inflexión.
Con toda la información obtenida, la gráfica de $f(x)$ queda de la siguiente manera:



(6) Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - x - 6}$.

Encuentre su dominio, sus raíces. Clasifique sus discontinuidades. Encuentre sus asíntotas horizontales y verticales. Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Encuentre sus intervalos de concavidad. Haga un bosquejo de la gráfica.

▼ Para el dominio tenemos:

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - x - 6 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x+2)(x-3) \neq 0 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x + 2 \neq 0 \text{ y } x - 3 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -2 \text{ y } x \neq 3 \right\} = \\ &= \mathbb{R} - \{ -2, 3 \}. \end{aligned}$$

Para hallar las raíces resolvamos:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} 3 \\ \frac{2}{6} \end{cases} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Luego, la única raíz es $x = \dfrac{1}{3}$ pues $x = 3 \notin D_f$.
Calculemos:

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(x+2)} = \mp\infty \text{ y}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(x+2)} = \frac{3\left(3 - \frac{1}{3}\right)}{3 + 2} = \frac{3\left(\frac{9-1}{3}\right)}{5} = \frac{3\left(\frac{8}{3}\right)}{5} = \frac{8}{5}.$$

De aquí se desprende que la discontinuidad en $x = 3$ es removible y que en $x = -2$ es esencial, precisamente infinita.
También que la recta $x = -2$ es asíntota vertical.

Para determinar las horizontales calculamos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)}{1+\dfrac{2}{x}} =$$

$$= \frac{3(1-0)}{1+0} = \frac{3\times 1}{1} = \frac{3}{1} = 3;$$

luego, $y = 3$ es asíntota horizontal.

Para precisar la monotonía de la función calculamos su derivada, tomando $f(x) = \dfrac{3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{x+2}$ para $x \neq 3$, de hecho $x \in D_f$:

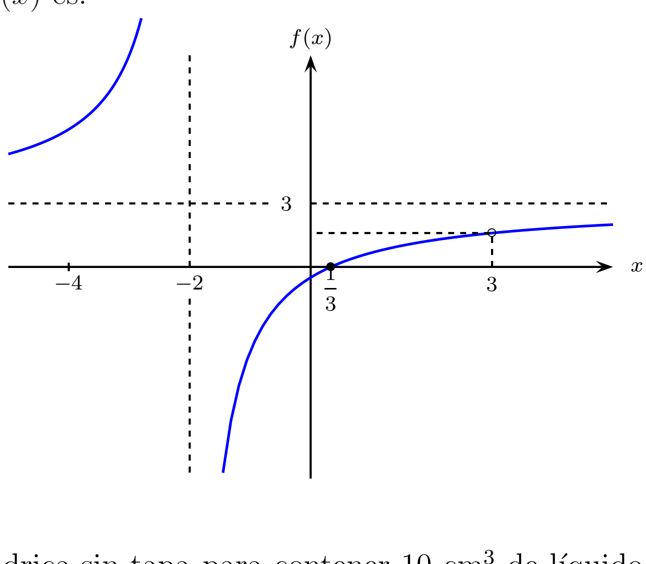
$$f'(x) = \frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0;$$

luego, $f(x)$ es creciente en $(-\infty,-2)\,,(-2,3)$ y en $(3,+\infty)$ y no tiene puntos críticos.
Y también para $x \in D_f$:

$$f''(x) = [7(x+2)^{-2}]' = -\frac{7\times 2}{(x+2)^3} = -\frac{14}{(x+2)^3}\,.$$

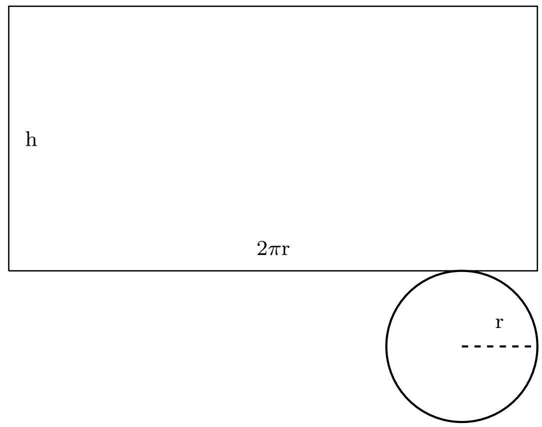
Si $x > -2 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ (para $x \neq 3$) $\Rightarrow$ la función f es convexa en $(-2,3)$ y en $(3,+\infty)$.
Si $x < -2 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ la función f es cóncava en $(-\infty,-2)$.
$f(0) = \dfrac{3}{-6} = -\dfrac{1}{2}$.

El bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es:



(7) Se va a fabricar una lata cilíndrica sin tapa para contener 10 cm^3 de líquido. Encuentre las dimensiones que minimizarán el costo del metal requerido para fabricar la lata.

▼ Usamos la figura



Tenemos que:

$$V = \pi r^2 h = 10 \text{ cm}^3.$$

Queremos que sea mínima la cantidad de material requerido, es decir, el área:

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h.$$

Así expresada el área es función de dos variables: r & h, pero como están relacionadas a través de la expresión para el volumen de la lata, podemos despejar a una de ellas en términos de la otra. Es más cómodo despejar h:

$$h = \frac{10}{\pi r^2} = \frac{10}{\pi} r^{-2}.$$

Sustituyendo este valor en la expresión para el área, la tendremos expresada como función de una única variable r:

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{10}{\pi} r^{-2} = \pi r^2 + 20 r^{-1}.$$

Hallemos sus puntos críticos:

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r = \frac{20}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{20}{2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 1.4710137 \text{ cm},$$

con lo cual:

$$h = \frac{10}{\pi} \left(\frac{10}{\pi} \right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{10}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = r.$$

Como:

$$A''(r) = 2\pi + \frac{40}{r^3} > 0, \text{ se trata en efecto de un mínimo.}$$

$\square$