CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E0200

(1) $|\,x^2 - 4\,| \geq x^2 + x + 1$.

(2) Sean $f(x) = -\dfrac{x^2}{36 - x^2}$ & $g(t) = \sqrt{8 - 3t}$ encontrar:

(a) D_f y D_g

(b) $(f \circ g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y sus respectivos dominios

(3) Sea $f(x) = \dfrac{4x^3 - 4x^2 - 3x}{2x^3 + 3x^2 - 9x}$.

Encontrar:

(a) Dominio y raíces

(b) Puntos de discontinuidad y su clasificación

(c) Ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales

(d) Esbozo gráfico

(4) Sea $f(x) = 6x^5 - 5x^3$,

encontrar:

(a) Intervalos de monotonía, máximos y mínimos

(b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

(c) Decir si la función es par o impar

(d) Esbozo gráfico

(5) Encontrar la ecuación de la recta tangente a

$$2x^2 - 3y^3 + \frac{2y}{xy - 1} = -5$$

en el punto $(0, 1)$.

(6) Calcular $f'(z)$ si $f(z) = \sqrt{4z^2 + \sqrt{27 - 2z}}$.

(7) Determinar el volumen máximo posible para un cilindro circular recto, si el área total de su superficie, incluyendo las dos tapas, es de 150π cm^2.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $|\, x^2 - 4 \,| \geq x^2 + x + 1$.

▼ Esta desigualdad es equivalente a las siguientes:

(a) $x^2 - 4 \geq x^2 + x + 1 \Leftrightarrow -4 \geq x + 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -5]$;

(b) $x^2 - 4 \leq -(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq -x^2 - x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \leq 0$.

Calculamos las raíces de la última cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

entonces, $2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$.

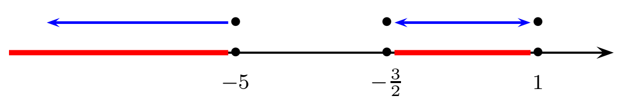
Usamos la siguiente tabla para resolver la desigualdad $2x^2 + x - 3 \leq 0$:

	Signo de		
Intervalo	$x + \frac{3}{2}$	$x - 1$	$2x^2 + x - 3$
$x < -\frac{3}{2}\,(< 1)$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{3}{2} < x < 1$	$+$	$-$	$-$
$x > 1\,(> -\frac{3}{2})$	$+$	$+$	$+$

Por lo tanto, $2x^2 + x - 3 \leq 0$ se cumple si $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, 1\right]$.

La solución de la desigualdad original es la unión de los dos casos anteriores, es decir,

$$x \in (-\infty, -5] \bigcup \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$$



□

(2) Sean $f(x) = -\dfrac{x^2}{36 - x^2}$ & $g(t) = \sqrt{8 - 3t}$, encontrar:

(a) D_f & D_g

▼ Puesto que $36 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6$, tenemos que:

Dominio de $f(x)$: $D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 36 - x^2 \neq 0 \,\right\} = \mathbb{R} - \{\, -6, 6 \,\}$.

Puesto que $8 - 3t \geq 0 \Leftrightarrow 8 \geq 3t \Leftrightarrow \dfrac{8}{3} \geq t$, entonces:

Dominio de $g(x)$: $D_g = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 8 - 3t \geq 0 \,\right\} \Leftrightarrow D_g = \left(-\infty, \dfrac{8}{3}\right]$.

□

(b) $(f\circ g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y sus respectivos dominios

▼ Vemos que

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sqrt{8-3x})=-\frac{(\sqrt{8-3x})^2}{36-(\sqrt{8-3x})^2}=$$
$$=-\frac{8-3x}{36-(8-3x)}=-\frac{8-3x}{28+3x}\,.$$

Para que $x\in D_{f\circ g}$, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. $x\in D_g=\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]$;
2. $g(x)\in D_f \Leftrightarrow \sqrt{8-3x}\in\mathbb{R}-\{-6,6\}$;

   $\sqrt{8-3x}$ es siempre positivo, por lo tanto nunca puede ser igual a -6.

   Vamos a calcular cuando $\sqrt{8-3x}=6\Rightarrow 8-3x=36\Rightarrow x=-\dfrac{28}{3}$.

Por lo tanto:

$$D_{f\circ g}=\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]-\left\{-\frac{28}{3}\right\}.$$

Ahora:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-\dfrac{x^2}{36-x^2}}{\sqrt{8-3x}}=-\frac{x^2}{(36-x^2)\sqrt{8-3x}}\,;$$
$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\bigcap D_g-\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;g(x)\neq 0\,\right\}.$$

Calculamos:

1. $D_f\bigcap D_g=\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]\bigcap\left[\mathbb{R}-\{-6,6\}\right]=\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]-\{\,-6\,\}$;
2. $g(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{8-3x}=0\Leftrightarrow 8-3x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}$.

Por lo tanto:

$$D_{\frac{f}{g}}=\left(-\infty,\frac{8}{3}\right)-\{\,-6\,\}.$$

□

(3) Sea $f(x)=\dfrac{4x^3-4x^2-3x}{2x^3+3x^2-9x}$, encontrar:

(a) Dominio y raíces

▼ Vemos que

$$f(x)=\frac{x(4x^2-4x-3)}{x(2x^2+3x-9)}=\frac{4x^2-4x-3}{2x^2+3x-9},\quad \text{si } x\neq 0.$$

Vamos a factorizar el numerador y denominador, encontrando sus raíces:

1. Numerador $4x^2 - 4x - 3$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Así:

$$4x^2 - 4x - 3 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)\,.$$

2. Denominador $2x^2 + 3x - 9$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ -\frac{12}{4} = -3\,. \end{cases}$$

Así:

$$2x^2 + 3x - 9 = 2\,(x+3)\left(x - \frac{3}{2}\right)\,.$$

Sustituyendo,

$$f(x) = \frac{4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{2\,(x+3)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = 2\frac{x + \frac{1}{2}}{x+3}, \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq \frac{3}{2};$$

concluimos entonces que su dominio es:
$D_f = \mathbb{R} - \left\{-3, 0, \frac{3}{2}\right\}\,.$
Por otro lado, la única raíz de f es $x = -\dfrac{1}{2}$.

(b) Puntos de discontinuidad y su clasificación

▼ $x = 0$ es una discontinuidad removible y se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2\frac{x + \frac{1}{2}}{x+3} = 2\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3}\,;$$

$x = \dfrac{3}{2}$ es una discontinuidad removible y se tiene que

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}} 2\frac{x + \frac{1}{2}}{x+3} = 2\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + 3} = 2\frac{2}{\frac{9}{2}} = \frac{8}{9}\,;$$

se tiene también que $x = -3$ es una discontinuidad infinita.

(c) Ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales

▼ Puesto que

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} 2\frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 + \frac{3}{x}} = 2\,,$$

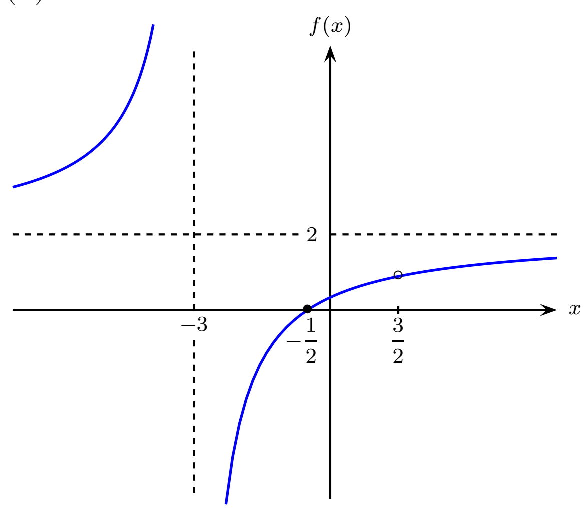
tenemos que $y = 2$ es la única asíntota horizontal.

Se ve también que $x = -3$ es una asíntota vertical. Vamos a calcular los límites laterales para ver el comportamiento asintótico de la función en este número:

1. $x \to -3^- \Rightarrow x + 3 < 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^-$
   por lo que
   $$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 2 \text{``}\left(\frac{-3+\frac{1}{2}}{0^-}\right)\text{''} = 2 \text{``}\left(\frac{-\frac{5}{2}}{0^-}\right)\text{''} = \text{``}\left(\frac{-5}{0^-}\right)\text{''} = +\infty.$$
2. $x \to -3^+ \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x + 3 \to 0^+$
   por lo que
   $$\lim_{x\to -3^+} f(x) = 2 \text{``}\left(\frac{-3+\frac{1}{2}}{0^+}\right)\text{''} = 2 \text{``}\left(\frac{-\frac{5}{2}}{0^+}\right)\text{''} = \text{``}\left(\frac{-5}{0^+}\right)\text{''} = -\infty.$$

(d) Esbozo gráfico

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



(4) Sea $f(x) = 6x^5 - 5x^3$, encontrar:

(a) Intervalos de monotonía, máximos y mínimos

▼ Calculamos la derivada

$$f'(x) = 30x^4 - 15x^2 = x^2(30x^2 - 15).$$

Las raíces de la derivada son $x = 0$ y cuando

$$30x^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0.7071067\,.$$

El signo de la derivada lo da el factor $30x^2 - 15 = 30\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Usamos la tabla siguiente para ver los intervalos de monotonía:

	Signo de		
Intervalo	$x+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f'(x)$
$x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\,(<\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+$	$-$	$-$
$x>\frac{\sqrt{2}}{2}\,(>-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$+$	$+$	$+$

entonces, $f(x)$ es creciente en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty,\right)$.

Se tiene que $f(x)$ es decreciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

por lo tanto, aplicando el criterio de la primera derivada, en $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, se tiene un máximo local estricto; y en $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, se tiene un mínimo local estricto.

(b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

▼ Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x)=120x^3-30x=30x(4x^2-1)$$

y vemos que:

$$4x^2-1=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Para calcular los intervalos de concavidad usamos la tabla:

	Signo de			
Intervalo	$x+\frac{1}{2}$	x	$x-\frac{1}{2}$	$f''(x)$
$x<-\frac{1}{2}\,(<0<\frac{1}{2})$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-\frac{1}{2}<x<0\,(<\frac{1}{2})$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(-\frac{1}{2}<)\,0<x<\frac{1}{2}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x>\frac{1}{2}\,(>0>-\frac{1}{2})$	$+$	$+$	$+$	$+$

entonces, $f(x)$ es cóncava hacia abajo, $f''(x)<0$, en $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\bigcup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

Y $f(x)$ es cóncava hacia arriba, $f''(x)>0$, en $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\bigcup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Debido a que existen cambios de concavidad y a la continuidad de f, se tienen puntos de inflexión en $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=0$ y $x=\dfrac{1}{2}$.

(c) Decir si la función es par o impar

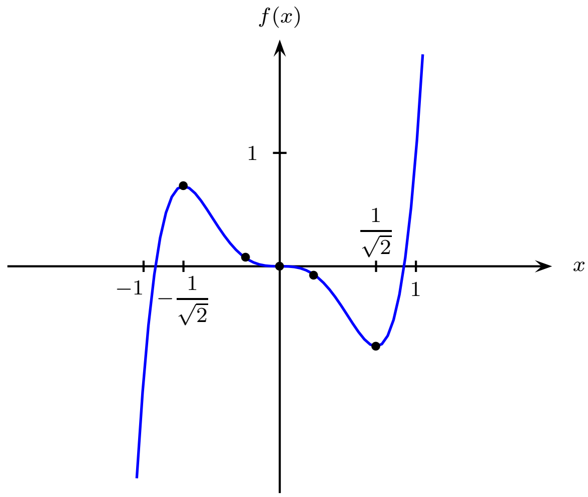
▼ Puesto que

$$f(-x) = 6(-x)^5 - 5(-x)^3 = -6x^5 + 5x^3 = -(6x^5 - 5x^3) = -f(x),$$

tenemos entonces que $f(x)$ es una función impar.

(d) Esbozo gráfico

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



(5) Encontrar la ecuación de la recta tangente a

$$2x^2 - 3y^3 + \frac{2y}{xy - 1} = -5$$

en el punto $(0, 1)$.

▼ Las coordenadas del punto $(0, 1)$ satisfacen la ecuación

$$2 \times 0^2 - 3 \times 1^3 + \frac{2 \times 1}{0 \times 1 - 1} = -3 - 2 = -5\ .$$

Existe una función $y = \phi(x)$ definida implícitamente. Vamos a derivar la ecuación con respecto a x para obtener:

$$4x - 9y^2y' + 2\frac{(xy-1)y' - y(y + xy')}{(xy-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 9y^2y' + 2\frac{xyy' - y' - y^2 - xyy'}{(xy-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 9y^2y' + 2\frac{-y' - y^2}{(xy-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 9y^2y' - \frac{2}{(xy-1)^2}y' - \frac{2y^2}{(xy-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[-9y^2 - \frac{2}{(xy-1)^2}\right]y' = -4x + \frac{2y^2}{(xy-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-4x + \dfrac{2y^2}{(xy-1)^2}}{-9y^2 - \dfrac{2}{(xy-1)^2}} .$$

Valuamos $y'(0,1)$:

$$y'(0,1) = \frac{\frac{2}{1}}{-9 - \frac{2}{1}} = \frac{2}{-11} ,$$

y por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0,1)$ con pendiente $-\dfrac{2}{11}$ es

$$\frac{y-1}{x-0} = -\frac{2}{11} \Rightarrow y = -\frac{2}{11}x + 1 .$$

□

(6) Calcular $f'(z)$ si $f(z) = \sqrt{4z^2 + \sqrt{27-2z}}$.

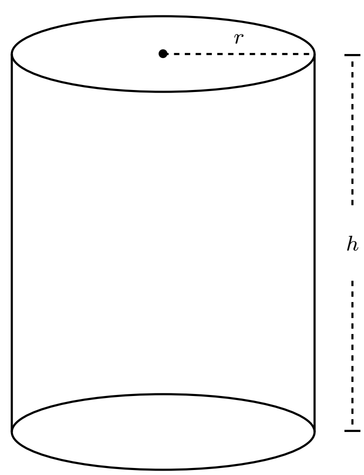
▼ Tenemos

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{4z^2 + \sqrt{27-2z}}}\left[8z + \frac{1}{2\sqrt{27-2z}}(-2)\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{4z^2 + \sqrt{27-2z}}}\left[8z - \frac{1}{\sqrt{27-2z}}\right] .$$

□

(7) Determinar el volumen máximo posible para un cilindro circular recto, si el área total de su superficie, incluyendo las dos tapas, es de 150π cm^2.

▼ Usamos la figura



El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h,$$

ésta es la función de la que deseamos calcular su máximo.
El área total es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 150\pi, \text{ de acuerdo al enunciado.}$$

Despejamos h de la ecuación anterior y la sustituimos en el volumen

$$\begin{aligned} r^2 + rh &= 75 \\ h &= \frac{75 - r^2}{r} = \frac{75}{r} - r \\ V(r) &= \pi r^2 \left(\frac{75}{r} - r \right) = 75\pi r - \pi r^3 \,. \end{aligned}$$

Podemos derivar el volumen, con respecto a r:

$$V'(r) = 75\pi - 3\pi r^2 \,.$$

Calculamos la segunda derivada:

$$V''(r) = -6\pi r < 0, \text{ cóncava hacia abajo la gráfica de } V(r).$$

Para calcular los puntos críticos, igualamos a cero la derivada:

$$V'(r) = 0 \Rightarrow 75\pi - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{75}{3} = 25 \Rightarrow r = 5 \,.$$

Con este valor del radio, que da un máximo absoluto para el volumen, calculamos h:

$$\begin{aligned} h &= \frac{75}{3} - 5 = 20 \\ h_{\text{máx}} &= 4 r_{\text{máx}} \,. \end{aligned}$$

$\square$