CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E0300

(1) $2x + 5 \le \dfrac{14}{x+1}$.

(2) $|-2x - 4| \ge 3 - 2x$.

(3) Sean
$$f(x) = 1 - 2x^2;\ g(x) = \sqrt{3x-1} \text{ y } h(x) = \frac{-2}{x-2};$$
determinar:
 (a) D_f, D_g & D_h
 (b) $\left[\left(\dfrac{f}{g}\right) \circ h\right](x)$, $(g^2h - f)(x)$

(4) Sea $f(x) = \dfrac{4x^3 - 2x^2 - 12x}{2x^3 - x^2 - 3x}$
determinar:
 (a) Dominio y raíces
 (b) Puntos de discontinuidad y clasificación
 (c) Ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales
 (d) Esbozo gráfico

(5) Sea $f(x) = \dfrac{9}{5}x^5 - 3x^3$
determinar:
 (a) Intervalos de monotonía, máximos y mínimos
 (b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión
 (c) Decir si la función es par o impar
 (d) Esbozo gráfico

(6) Calcular $f'(x)$, si $f(x) = \sqrt{4x^2 + \sqrt{27 - 2x}}$.
Además, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de coordenadas $(1, 3)$.

(7) Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 2 km de ancho. Sea C el punto enfrente de A en la otra orilla. El hombre desea llegar a un punto B situado a 8 km a la derecha y en la misma orilla de C.
El hombre puede remar en su bote cruzando el río hasta el punto D entre B y C. Si rema a 6 km/h y corre a 8 km/h ¿a qué distancia debe estar D del punto C, para llegar al punto B lo más pronto posible?

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $2x + 5 \le \dfrac{14}{x+1}$.

▼ Desde luego $x + 1 \neq 0$, es decir, $x \neq -1$, por lo que -1 no pertenece al conjunto solución de la desigualdad.
Pueden ocurrir entonces dos cosas:

$$\text{o bien } x + 1 > 0 \text{ o bien } x + 1 < 0.$$

Analicemos el caso primero en que $x + 1 > 0$, es decir, que $x > -1$.
Multiplicando a ambos miembros de la desigualdad por $x + 1$ se preserva el sentido de la desigualdad; la propuesta es equivalente a

$$(2x + 5)(x + 1) \le \frac{14}{x+1}(x + 1).$$

Esto es:

$$2x^2 + 2x + 5x + 5 \le 14 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 5 - 14 \le 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 9 \le 0\,.$$

Averigüemos cuando

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = {} & \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \\ & = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} \dfrac{-18}{4} \\ \dfrac{4}{4} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{9}{2} \\ 1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Hallemos el signo del polinomio $f(x) = 2x^2 + 7x - 9$ en los intervalos $\left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{9}{2}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$, tomando un punto en cada uno de ellos, digamos:

$$-5 \in \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right),\ 0 \in \left(-\frac{9}{2}, 1\right) \text{ y } 2 \in (1, +\infty)\,.$$

Calculamos $f(x)$ en estos puntos:
$f(-5) = 2(-5)^2 + 7(-5) - 9 = 2 \times 25 - 35 - 9 = 50 - 44 = 6 > 0$, ahora como el polinomio es continuo en $\mathbb{R}$ y no es cero en $\left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$, entonces, en todo el intervalo tiene el mismo signo; luego $f(x) > 0$ para $x \in \left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$.

De la misma manera:

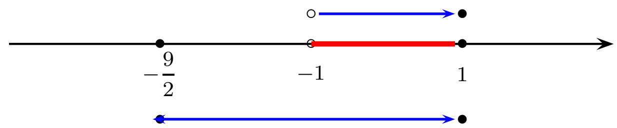
$f(0) = 2 \times 0^2 + 7 \times 0 - 9 = 2 \times 0 + 0 - 9 = 0 - 9 = -9 < 0$, por lo que $f(x) < 0$ para $x \in \left(-\dfrac{9}{2}, 1\right)$;

$f(2) = 2 \times 2^2 + 7 \times 2 - 9 = 2 \times 4 + 14 - 9 = 8 + 5 = 13 > 0$, de donde se sigue que $f(x) > 0$ para $x \in (1, +\infty)$.

Ahora busquemos $x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty)$, donde $f(x) = 2x^2 + 7x - 9 \le 0$, es decir,

$$x \in (-1, +\infty) \bigcap \left[-\frac{9}{2}, 1\right] = (-1, 1]\,.$$

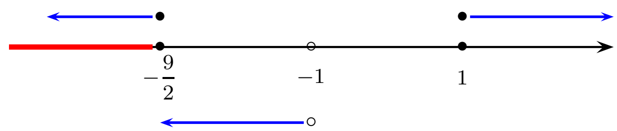
Como se ve en la figura siguiente:



Considerando ahora que $x < -1 \Leftrightarrow x + 1 < 0$, al multiplicar a ambos miembros de la desigualdad por $x + 1$ se invierte el sentido de la desigualdad, y la que tenemos que resolver ahora es:

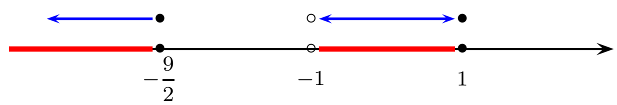
$$2x + 5 \le \frac{14}{x+1} \Leftrightarrow (2x+5)(x+1) \ge 14 \Leftrightarrow f(x) = 2x^2 + 7x - 9 \ge 0.$$

Esto es, $x \in (-\infty, -1) \bigcap \left\{ \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \bigcup [1, +\infty) \right\} = \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right]$.
Lo anterior se visualiza como sigue:



Por lo que en definitiva, el conjunto solución es

$$CS = \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \bigcup (-1, 1]\,.$$



Como podremos verificar, $-\frac{9}{2}$ y 1 satisfacen la desigualdad propuesta, pues al hacer $x = -\frac{9}{2}$ & $x = 1$ respectivamente:

$$2\left(-\frac{9}{2}\right) + 5 = -9 + 5 = -4 \le \frac{14}{-\frac{9}{2}+1} = \frac{14}{-\frac{7}{2}} = -\frac{14 \times 2}{7} = -4, \text{ y también}$$

$$2 \times 1 + 5 = 2 + 5 = 7 \le \frac{14}{1+1} = \frac{14}{2} = 7\,.$$

Pero en cambio, como se demuestra, $x = -2$ & $x = 2$ no la satisfacen:

$$2(-2) + 5 = -4 + 5 = 1 \not\le \frac{14}{-2+1} = \frac{14}{-1} = -14;$$

$$2(2) + 5 = 4 + 5 = 9 \not\le \frac{14}{2+1} = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}\,.$$

□

(2) $|-2x - 4| \ge 3 - 2x$.

▼ Esta desigualdad equivale a las dos desigualdades

$$-2x - 4 \ge 3 - 2x, \text{ la primera y } -2x - 4 \le -(3 - 2x), \text{ la segunda,}$$

por lo que tenemos que resolver cada una y unir los conjuntos solución resultantes.
Trasponiendo términos en la primera obtenemos que:

$$-2x - 4 \ge 3 - 2x \Leftrightarrow -2x + 2x \ge 3 + 4 \Leftrightarrow 0 \ge 7\,.$$

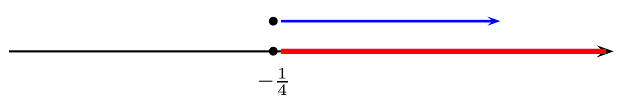
Lo cual no ocurre para cualquier x, de lo que se desprende que el conjunto solución de esta desigualdad es el conjunto vacío, $\emptyset$.

Haciendo lo mismo en la segunda tenemos:

$$-2x - 4 \leq -(3 - 2x) \Leftrightarrow -2x - 4 \leq -3 + 2x \Leftrightarrow -2x - 2x \leq -3 + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Por lo que el conjunto solución es precisamente

$$CS = \emptyset \bigcup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right).$$



Confirmemos, por ejemplo, que $x = -\dfrac{1}{4}$ sí satisface la desigualdad, poniendo en lugar de x, $-\dfrac{1}{4}$

$$\left|-2\left(-\frac{1}{4}\right) - 4\right| = \left|+\frac{2}{4} - 4\right| = \left|\frac{1}{2} - 4\right| = \left|\frac{1-8}{2}\right| = \left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2} \geq$$
$$\geq 3 - 2\left(-\frac{1}{4}\right) = 3 + \frac{2}{4} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}.$$

$\square$

(3) Sean

$$f(x) = 1 - 2x^2;\ g(x) = \sqrt{3x - 1}\ \ \&\ h(x) = \frac{-2}{x-2};$$

determinar:

(a) Los siguientes dominios: D_f, D_g & D_h

▼ Dominio de f: $D_f = \mathbb{R}$;

Dominio de g: $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 3x - 1 \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 3x \geq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq \frac{1}{3} \right\} = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$;

y, por último:

Dominio de h: $D_h = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x - 2 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 2 \right\} = \mathbb{R} - \{2\}$.

$\square$

(b) Las funciones: $\left[\left(\dfrac{f}{g}\right) \circ h\right](x)$ & $(g^2 h - f)(x)$

▼ Tenemos que

$$\left[\left(\frac{f}{g}\right)\circ h\right](x) = \frac{f}{g}[h(x)] = \frac{f}{g}\left(\frac{-2}{x-2}\right) = \frac{f\left(\dfrac{-2}{x-2}\right)}{g\left(\dfrac{-2}{x-2}\right)} = \frac{1-2\left(\dfrac{-2}{x-2}\right)^2}{\sqrt{3\dfrac{-2}{x-2}-1}} =$$

$$= \frac{1-2\dfrac{4}{(x-2)^2}}{\sqrt{\dfrac{-6}{x-2}-1}} = \frac{\dfrac{(x-2)^2-8}{(x-2)^2}}{\sqrt{\dfrac{-6-(x-2)}{x-2}}} = \frac{(x-2)^2-8}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{-6-x+2}} =$$

$$= \frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{-4-x}}\,.$$

$$(g^2h-f)(x) = (g^2h)(x) - f(x) = g^2(x)h(x) - f(x) =$$

$$= (\sqrt{3x-1})^2\frac{-2}{x-2} - (1-2x^2) = \frac{(3x-1)(-2)-(1-2x^2)(x-2)}{x-2} =$$

$$= \frac{-6x+2-x+2+2x^3-4x^2}{x-2} = \frac{2x^3-4x^2-7x+4}{x-2}\,.$$

□

(4) Sea $f(x) = \dfrac{4x^3-2x^2-12x}{2x^3-x^2-3x}$ determinar:

(a) Dominio y raíces

▼ Dominio de f: como $f(x)$ es una función racional su dominio es el complemento de las raíces del denominador. Como

$$2x^3-x^2-3x = x(2x^2-x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } 2x^2-x-3=0$$

$$\text{y como } 2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{4} = \frac{1\pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ -1\,, \end{cases}$$

se tiene entonces que $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1, 0, \dfrac{3}{2}\right\}$.

Las raíces deben ser los puntos donde se anule el numerador:

$$4x^3-2x^2-12x = 2x(2x^2-x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ y también}$$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{49}}{4} = \frac{1\pm 7}{4}\begin{cases} 2 \\ -\dfrac{3}{2}\,. \end{cases}$$

Pero, como $0 \notin D_f$, entonces las únicas raíces son $-\dfrac{3}{2}$ y 2.

□

(b) Puntos de discontinuidad y clasificación

▼ La función f es discontinua en las raíces del denominador -1, 0 y $\dfrac{3}{2}$. Ahí tenemos que

$$\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to -1^{\mp}} \frac{2^2 x(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{2x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+1)} = \lim_{x\to -1^{\mp}} \frac{2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+1)} = \mp\infty,$$

pues el $\lim\limits_{x\to -1}(x-2) = -3$ y el $\lim\limits_{x\to -1}\left(x-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{5}{2}$ son negativos.

Y en cambio, el $\lim\limits_{x\to -1} 2\left(x+\dfrac{3}{2}\right) > 0$.

Mientras que el $\lim\limits_{x\to -1^-}(x+1) = 0$ con valores negativos y el $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1) = 0$ con valores positivos.

Por otro lado

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+1)} = \frac{2(-2)\dfrac{3}{2}}{\left(-\dfrac{3}{2}\right)1} = \frac{-6}{-\dfrac{3}{2}} = \frac{6\times 2}{3} = 4;$$

por último

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^{\mp}} f(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}^{\mp}} \frac{2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+1)} = \pm\infty\,.$$

Pues el $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} 2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ y el $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}(x+1)$ son positivos. Además $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}(x-2) < 0$.

Y el $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-}\left(x-\dfrac{3}{2}\right) = 0$ con valores negativos; pero el $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+}\left(x-\dfrac{3}{2}\right) = 0$ con valores positivos.

Luego, $x = -1$ & $x = \dfrac{3}{2}$ son discontinuidades esenciales: específicamente ambas son infinitas; mientras que en $x = 0$ hay una discontinuidad removible.

□

(c) Ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales

▼ Por lo que acabamos de ver, las rectas $x = -1$ & $x = \dfrac{3}{2}$ son asíntotas verticales, y para hallar la horizontal calculamos:

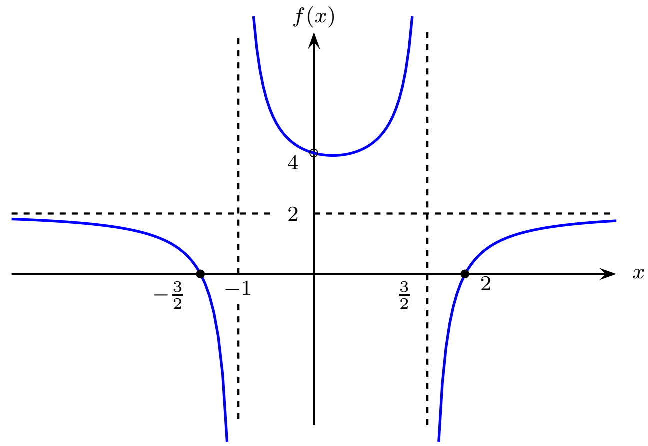
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3\left(4-\dfrac{2}{x}-\dfrac{12}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{4-\dfrac{2}{x}-\dfrac{12}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}} = \frac{4-0-0}{2-0-0} = \frac{4}{2} = 2\,,$$

luego la recta $y = 2$ es asíntota horizontal.

□

(d) Esbozo gráfico

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



$\square$

(5) Sea $f(x) = \dfrac{9}{5}x^5 - 3x^3$, determinar:

(a) Intervalos de monotonía, máximos y mínimos

▼ La monotonía de la función nos la da su derivada:

$$f'(x) = 9x^4 - 9x^2 = 9x^2(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ó } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = -1 \text{ ó } x = 1\,.$$

Veamos el signo de la derivada fuera de estos tres puntos críticos, aprovechando el hecho de que es continua en $\mathbb{R}$.
Los tres puntos críticos dividen al eje real en cuatro subintervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,+\infty)$. Elegimos un punto en cada uno de ellos y determinamos el signo de la derivada en él, que será el mismo que tiene en todo el intervalo, ya que ahí no tiene raíces. Así:

$-2 \in (-\infty,-1) \Rightarrow f'(-2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ en $(-\infty,-1) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty,-1)$;

$-\dfrac{1}{2} \in (-1,0) \Rightarrow f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ en $(-1,0) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1,0)$;

$\dfrac{1}{2} \in (0,1) \Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ en $(0,1) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(0,1)$; y por último,

$2 \in (1,+\infty) \Rightarrow f'(2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ en $(1,+\infty) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(1,+\infty)$.

También de aquí resulta que en $x = -1$ hay un máximo, pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente; y en $x = 1$ hay un mínimo, porque ahora la función cambia de decreciente a creciente.

El mínimo es $f(1) = \dfrac{9}{5} - 3 = \dfrac{9-15}{5} = -\dfrac{6}{5}$.
Y el máximo es $f(-1) = -\dfrac{9}{5} + 3 = \dfrac{-9+15}{5} = \dfrac{6}{5}$, naturalmente, pues la función es impar.

(b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

▼ De esto nos habla la segunda derivada:

$$f''(x) = (9x^4 - 9x^2)' = 36x^3 - 18x = 18x(2x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.707106781\,.$$

Procedamos exactamente igual a como lo hicimos para discernir la monotonía de f. Sean:

$$
\begin{aligned}
-1 &\in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \\
-\frac{1}{2} &\in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \\
\frac{1}{2} &\in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y por último} \\
1 &\in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right);
\end{aligned}
$$

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ en } \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ en } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba en } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right);$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ en } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$f''(1) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right).$$

En $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hay puntos de inflexión, ya que en ellos la curva continua cambia el sentido de su concavidad.
Los puntos de la gráfica de f son:

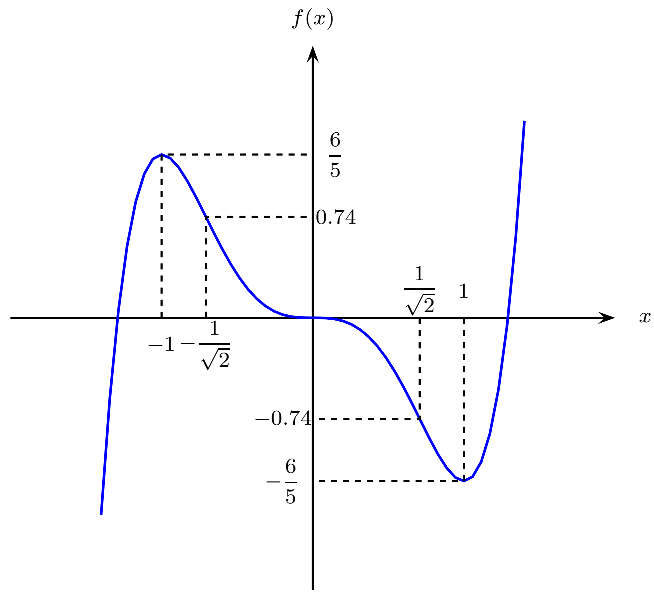
$$
\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{2^{1/2}}\right)\right] &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{5}2^{-5/2} + 3 \times 2^{-3/2}\right) \approx \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0.74246212\right); \\
[0, f(0)] &= (0, 0) \\
\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{2^{1/2}}\right)\right] &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -0.74246212\right).
\end{aligned}
$$

(c) Decir si la función es par o impar

▼ Ya veíamos que era impar.

(d) Esbozo gráfico

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



(6) Calcular $f'(x)$, si $f(x) = \sqrt{4x^2 + \sqrt{27 - 2x}}$.
Además, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de coordenadas $(1, 3)$.

▼ Escribamos:

$$f(x) = [4x^2 + (27 - 2x)^{1/2}]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{8x + \dfrac{-2}{2\sqrt{27 - 2x}}}{2\sqrt{4x^2 + \sqrt{27 - 2x}}} = \frac{8x\sqrt{27 - 2x} - 1}{2\sqrt{(27 - 2x)(4x^2 + \sqrt{27 - 2x})}} .$$

Luego, la pendiente de la recta tangente en el punto $(1, 3)$ es

$$f'(1) = \frac{8\sqrt{27 - 2} - 1}{2\sqrt{25(4 + 5)}} = \frac{40 - 1}{2\sqrt{225}} = \frac{39}{2 \times 15} = \frac{39}{30};$$

y la ecuación de la recta tangente requerida es

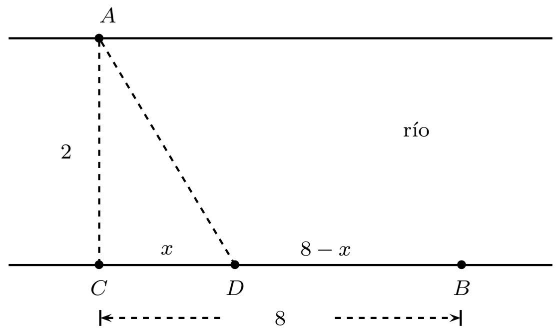
$$y - 3 = \frac{39}{30}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{39}{30}x - \frac{39}{30} + 3 \Rightarrow y = \frac{39}{30}x + \frac{51}{30} .$$

Observación: el punto $(1, 3)$ sí pertenece a la gráfica de la función, pues

$$f(1) = \sqrt{4 + \sqrt{27 - 2}} = \sqrt{4 + \sqrt{25}} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3.$$

(7) Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 2 km de ancho. Sea C el punto enfrente de A en la otra orilla. El hombre desea llegar a un punto B situado a 8 km a la derecha y en la misma orilla de C.
El hombre puede remar en su bote cruzando el río hasta el punto D entre B y C. Si rema a 6 km/h y corre a 8 km/h ¿a qué distancia debe estar D del punto C, para llegar al punto B lo más pronto posible?

▼ Hagamos un bosquejo figurado de la situación:



Queremos hallar x de manera que el tiempo para ir de A a D por el río, y de D a B por la orilla, sea mínimo. Por el teorema de Pitágoras $AD = \sqrt{4+x^2}$; entonces, el tiempo empleado para recorrer esta distancia es $t_1 = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{6}$ horas ya que
tiempo empleado $= \dfrac{\text{espacio recorrido}}{\text{velocidad}}$, puesto que velocidad $= \dfrac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}}$.
El tiempo para recorrer DB es $t_2 = \dfrac{8-x}{8}$ horas.
La función de la que vamos a buscar su máximo es

$$T(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8}\,.$$

Su derivada es

$$T'(x) = \frac{2x}{2\times 6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 6\sqrt{4+x^2} = 8x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36(4+x^2) = 8^2x^2 \Leftrightarrow 144 = 64x^2 - 36x^2 \Leftrightarrow 28x^2 = 144 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{28} = \frac{36}{7} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{36}{7}} = \frac{6}{\sqrt{7}} \approx 2.26 \text{ km, es decir,}$$

éste es el único punto crítico.
Calculamos la segunda derivada:

$$T''(x) = \frac{6\sqrt{4+x^2} - \dfrac{6x2x}{2\sqrt{4+x^2}}}{(6\sqrt{4+x^2})^2} = \frac{6(4+x^2)-6x^2}{36(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{24+6x^2-6x^2}{36(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} =$$
$$= \frac{24}{36(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{2}{3(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}\,.$$

Observemos que $T'' > 0$ siempre y en particular $T''(2.26) > 0$, por lo cual existe un mínimo local en $x = 2.26$ km; podemos considerar que el dominio de la función T es $D_T = [0, 8]$, pues no tendría sentido desembarcar a la izquierda de C ni más allá de B; luego el mínimo es el menor de los tres números:

$$T(0) = \frac{2}{6} + \frac{8-0}{8} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \text{ h } = 1.\overline{3} \text{ hora;}$$
$$T(2.26) = \frac{\sqrt{4+(2.26)^2}}{6} + \frac{8-2.26}{8} = \frac{\sqrt{9.14}}{6} + \frac{5.74}{8} = 1.2175 \text{ hora;}$$
$$T(8) = \frac{\sqrt{4+8^2}}{6} + \frac{8-8}{8} = \frac{\sqrt{4+68}}{6} + \frac{0}{8} \approx 1.41421352 \text{ hora.}$$

Luego efectivamente el tiempo mínimo se logra si desembarca a 2.26 km de C.

$\square$