CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E0400, P-01

(1) Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{(2x-4)^2}$ y determine:

(a) El dominio, raíces e intervalos de continuidad
(b) Asíntotas verticales y horizontales
(c) Los intervalos de monotonía, los puntos máximos y mínimos (absolutos y relativos)
(d) Los intervalos de concavidad y puntos de inflexión
(e) Bosquejo gráfico y rango

(2) La altura de un objeto a los t segundos, después de dejarlo caer desde 500 pies, está dada por

$$s(t) = 500 - 16t^2.$$

(a) ¿En qué intervalo de tiempo el objeto se encuentra arriba de 356 pies?
(b) Calcule la velocidad media del objeto en el intervalo de tiempo $[1, 4]$
(c) Determine la velocidad instantánea al tiempo t

¿En qué momento la velocidad instantánea es igual a la velocidad media calculada en el inciso anterior?

(3) Considere la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{13 - x^2} - x - 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

(a) Viendo la tabla de valores de f, calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ con dos cifras decimales exactas

x	$f(x)$
1.997	1.66096
1.998	1.66286
1.999	1.66476
2	Indeterminado
2.001	1.66858
2.002	1.67049
2.003	1.67241

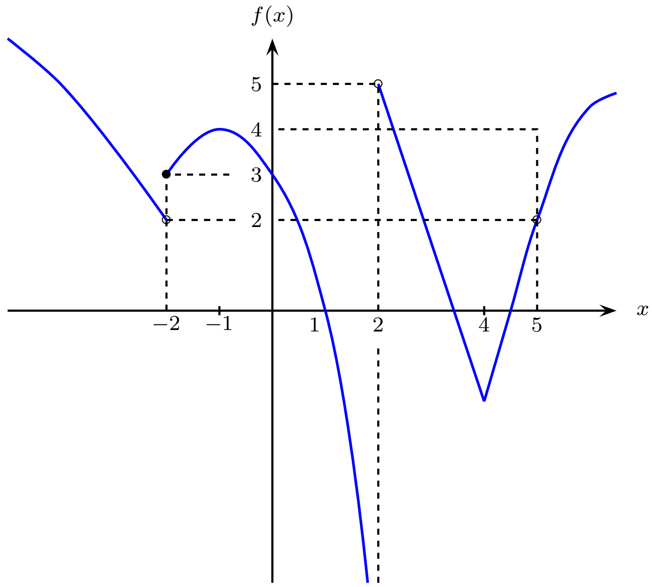
(b) Calcule exactamente $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ usando la expresión algebraica de la función

¿Cuál es la tercera cifra decimal exacta del valor del límite?

(4) Dos trenes parten de una estación con 2 horas de diferencia. El primero en partir se dirige hacia el norte con una velocidad de 100 km/h; el segundo en partir se dirige hacia el este a una velocidad de 60 km/h; ¿a qué razón está cambiando la distancia entre los 2 trenes, 3 horas después de partir el segundo tren?

(5) Sea $f(x)$ la función que tiene la siguiente gráfica:

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.



Determinar:

(a) Los intervalos de continuidad y los siguientes valores

$$\lim_{x\to a^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x),\ \lim_{x\to a} f(x), \text{ y } f(a)$$

para $a=-2$, $a=2$, $a=5$.

(b) La clasificación de discontinuidades. ¿En cuáles puntos y con qué valores se puede redefinir $f(x)$ para convertirla en una función continua en esos puntos?

(c) Los intervalos donde $f'>0$, $f'(x)<0$ y los puntos donde $f'=0$ o donde no existe la derivada

(6) Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Hallar cómo debe cortarse el alambre de modo que el área encerrada sea:

(a) Máxima

(b) Mínima

Interpretar prácticamente sus resultados.

Respuestas

(1) Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{(2x-4)^2}$ y determine:

(a) El dominio, raíces e intervalos de continuidad

▼ Su dominio: $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq 2 \right\} = \mathbb{R} - \{ 2 \}$;
Su raíz es $x = 0$.
$f(x)$ es continua en su dominio.

(b) Asíntotas verticales y horizontales

▼ Si escribimos:

$$f(x) = \frac{2x}{4(x-2)^2} = \frac{x}{2(x^2 - 4x + 4)} = \frac{1}{2(x - 4 - \frac{4}{x})},$$

vemos que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0;$$

por lo tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal.
Vemos también que $x = 2$ es una asíntota vertical.
Tenemos que:

$$\lim_{x \to 2^{\mp}} f(x) = +\infty.$$

(c) Los intervalos de monotonía, los puntos máximos y mínimos (absolutos y relativos)

▼ Partiendo de

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x}{(x-2)^2},$$

calculamos la derivada

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x-2)^2 - x \times 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{1}{2} \times \frac{(x-2) - 2x}{(x-2)^3} =$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{-2-x}{(x-2)^3} = -\frac{1}{2} \times \frac{x+2}{(x-2)^3}.$$

El signo de esta derivada viene dado por $-(x-2)$ y $x+2$.
Construimos la tabla:

	Signo de		
Intervalo	$x+2$	$-(x-2)$	$f'(x)$
$x < -2\,(< 2)$	$-$	$+$	$-$
$-2 < x < 2$	$+$	$+$	$+$
$x > 2\,(> -2)$	$+$	$-$	$-$

y concluimos que:
$f(x)$ es creciente para x en $(-2, 2)$; y que
$f(x)$ es decreciente para x en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$.
Con esta información se ve que $f(x)$ no tiene máximo relativo ni absoluto y que en $x = -2$, $f(x)$ tiene un mínimo local que también es absoluto, en el punto
$[-2, f(-2)] = \left(-2, \dfrac{-4}{64}\right) = \left(-2, -\dfrac{1}{16}\right)$.

(d) Los intervalos de concavidad y puntos de inflexión

▼ Partiendo de

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{x+2}{(x-2)^3}\,,$$

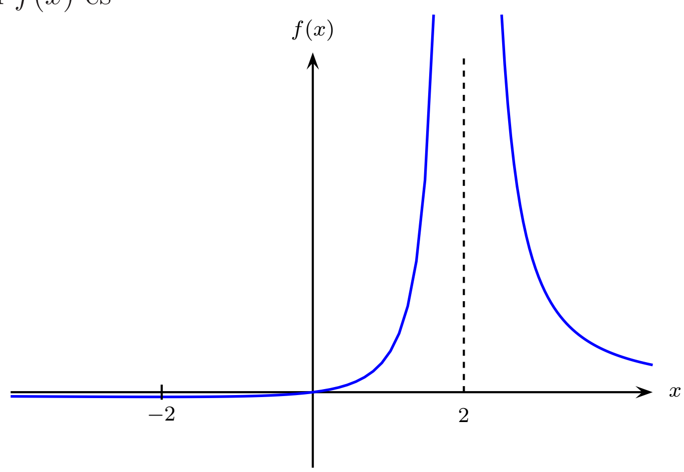
calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{(x-2)^3 - (x+2) \times 3(x-2)^2}{(x-2)^6} = -\frac{1}{2} \times \frac{(x-2) - (3x+6)}{(x-2)^4} =$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{x-2-3x-6}{(x-2)^4} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x-8}{(x-2)^4} = \frac{x+4}{(x-2)^4}\,.$$

El signo de la segunda derivada lo produce $x+4$, así:
$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$ pues $f''(x) < 0$;
$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-4, +\infty)$ ya que $f''(x) > 0$;
En $x = -4$ hay un punto de inflexión.

(e) Bosquejo gráfico y rango

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es



$$R_f = \left[-\frac{1}{16}, +\infty\right).$$

(2) La altura de un objeto a los t segundos, después de dejarlo caer desde 500 pies, está dada por

$$s(t) = 500 - 16t^2.$$

(a) ¿En qué intervalo de tiempo el objeto se encuentra arriba de 356 pies?

▼ Contestar esta pregunta es equivalente a resolver la desigualdad:

$$500 - 16t^2 > 356 \Leftrightarrow 144 > 16t^2 \Leftrightarrow 9 > t^2 \Leftrightarrow 3 > |\,t\,|\,.$$

La solución de la desigualdad es $t \in (-3, 3)$, pero considerando que $t \geq 0$, el objeto se encuentra arriba de 356 pies si $t \in [0, 3)$.

(b) Calcule la velocidad media del objeto en el intervalo de tiempo $[1, 4]$

▼ Si efectuamos los siguientes calculos:

$$\frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{(500 - 16 \times 16) - (500 - 16)}{3} = \frac{-256 + 16}{3} = \frac{-240}{3} = -80,$$

comprobamos que la velocidad media es de -80 pies/s. El objeto cae.

(c) Determine la velocidad instantánea al tiempo t

▼ ¿En qué momento la velocidad instantánea es igual a la velocidad media calculada en el inciso anterior?

Calculamos la velocidad instantánea

$$v(t) = s'(t) = -32t$$

y con ello comprobamos que

$$-32t = -80 \Leftrightarrow t = 2.5 \text{ segundos.}$$

Nótese que $2.5 \in (1, 4)$. Se cumple con el teorema del Valor Medio.

(3) Considere la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{13 - x^2} - x - 1}{x^2 - 5x + 6}\ .$$

(a) Viendo la tabla de valores de f, calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ con dos cifras decimales exactas

x	$f(x)$
1.997	1.66096
1.998	1.66286
1.999	1.66476
2	Indeterminado
2.001	1.66858
2.002	1.67049
2.003	1.67241

▼ Se comprueba que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1.66$.

(b) Calcule exactamente $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, usando la expresión algebraica de la función

▼ Vemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{13-x^2}-x-1}{x^2-5x+6} &= \frac{\sqrt{13-x^2}-(x+1)}{x^2-5x+6}\times\frac{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} =\\
&= \frac{(13-x^2)-(x+1)^2}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} =\\
&= \frac{13-x^2-(x^2+2x+1)}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} =\\
&= \frac{-2x^2-2x+12}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} =\\
&= -2\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} =\\
&= -2\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} =\\
&= -2\frac{x+3}{x-3}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)} \quad (\text{si } x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2).
\end{aligned}$$

Entonces

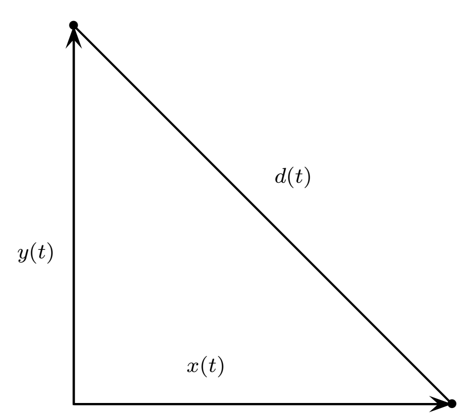
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\left[-2\frac{x+3}{x-3}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}\right]\\
&= -2\frac{5}{-1}\times\frac{1}{\sqrt{13-4}+(2+1)} = \frac{10}{6} = 1.6667.
\end{aligned}$$

¿Cuál es la tercera cifra decimal exacta del valor del límite?

Con lo anterior calculado, podemos responder que 6 es la tercera cifra decimal del límite.

(4) Dos trenes parten de una estación con 2 horas de diferencia. El primero en partir se dirige hacia el norte con una velocidad de 100 km/h; el segundo en partir se dirige hacia el este a una velocidad de 60 km/h; ¿a qué razón está cambiando la distancia entre los 2 trenes, 3 horas después de partir el segundo tren?

▼ Usamos la figura



Para todo tiempo t, después que ha salido el segundo tren se tiene:

$$d^2(t) = x^2(t) + y^2(t).$$

Derivando con respecto a t tenemos:

$$2d(t)d'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t),$$

entonces

$$d(t)d'(t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t)$$

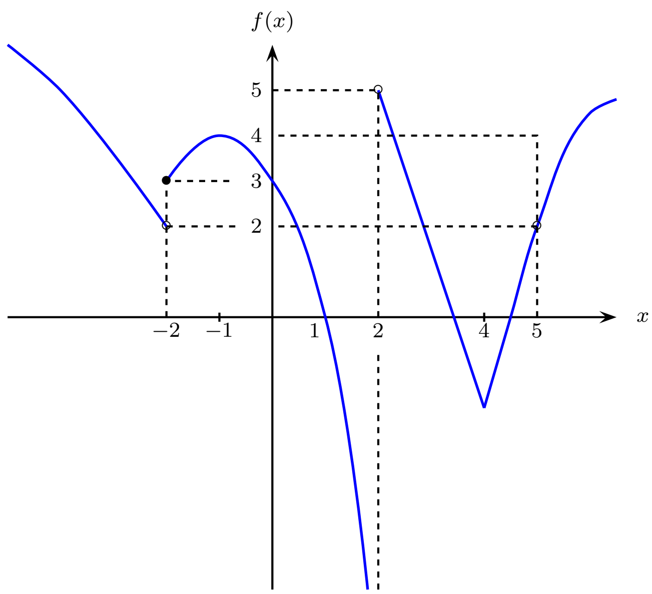
y

$$d'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{d(t)}. \tag{A}$$

Tenemos la siguiente información:
$x(t) = 60t$ km, $t = 0$ es la salida del segundo tren; $x'(t) = 60$ km/hora.
$y(t) = 200 + 100t$ km; cuando $t = 0$, el primer tren ha recorrido 200 km; $y'(t) = 100$ km/hora.
$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.
Usando esta información en (A), para $t = 3$:

$$d'(3) = \frac{180 \times 60 + 500 \times 100}{\sqrt{180^2 + 500^2}} \approx 114.412 \text{ km/hora.}$$

(5) Sea $f(x)$ la función que tiene la siguiente gráfica:



Determinar:

(a) Los intervalos de continuidad y los siguientes valores

$$\lim_{x\to a^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x),\ \lim_{x\to a} f(x),\ \&\ f(a)$$

para $a = -2$, $a = 2$, $a = 5$.

▼ La función es continua en

$$(-\infty, -2) \bigcup [-2, 2) \bigcup (2, 5) \bigcup (5, +\infty).$$

Tenemos
$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe; $f(-2) = 3$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe; $f(2)$ no está definido;

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 2$; $f(5) = 4$.

(b) La clasificación de discontinuidades ¿En cuáles puntos y con qué valores se puede redefinir $f(x)$ para convertirla en una función continua en esos puntos?

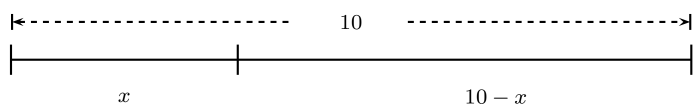
▼ En $x = -2$ se tiene una discontinuidad de salto.
En $x = 2$ se tiene una discontinuidad esencial infinita.
En $x = 5$ se tiene una discontinuidad removible. Si redefinimos la función como $f(5) = 2$, la función se hace continua en este punto.

(c) Los intervalos donde $f' > 0$, $f'(x) < 0$ y los puntos donde $f' = 0$ o donde no existe la derivada:

▼ $f'(x) < 0$ en$(-\infty, -2)$, $(-1, 2)$ y en $(2, 4)$;
$f'(x) > 0$ en $(-2, -1)$, y en $(4, +\infty) - \{\,5\,\}$;
$f'(x) = 0$ en $x = -1$;
$f'(x)$ no existe en $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$ y $x = 5$.

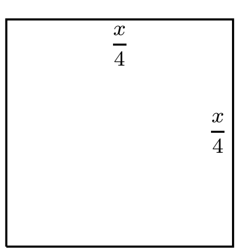
(6) Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Hallar cómo debe cortarse el alambre de modo que el área encerrada sea:
(a) Máxima
(b) Mínima
Interpretar prácticamente sus resultados.

▼ Usando la siguiente figura

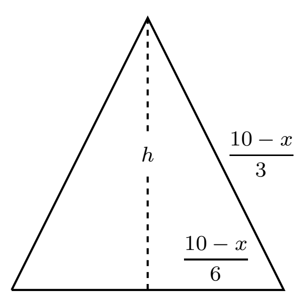


Alambre

La parte x del alambre se usa para el cuadradado, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{x}{4}$.
La parte $10 - x$ del alambre se usa para el triángulo, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{10 - x}{3}$.



Cuadrado



Triángulo

De la figura del triángulo, obtenemos la siguiente relación usando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{10 - x}{6}\right)^2 = \left(\frac{10 - x}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{1}{9}(10 - x)^2 - \frac{1}{36}(10 - x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{36}(10 - x)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6}(10 - x).$$

El área del cuadrado

$$A_C(x) = \frac{x^2}{16}.$$

El área del triángulo

$$A_T(x) = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(10-x) \times \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x) = \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2.$$

El área de ambas figuras

$$A(x) = A_T(x) + A_C(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2.$$

Ésta es la función a la cual deseamos calcular su máximo y mínimo.

Nótese que el dominio de esta función es $D_A = [0, 10]$.

Calculamos la primera derivada:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{36} \times 2(10-x)(-1) = \frac{1}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{18}(10-x) = \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18}x = \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

Calculamos el punto crítico:

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} = 0 \Rightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \approx 4.34965.$$

Puesto que al calcular la segunda derivada se tiene

$$A''(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{72} > 0,$$

entonces el punto crítico anterior es un mínimo local.
Calculamos la función $A(x)$ en los extremos de su dominio:

$$A(0) = \frac{\sqrt{3}}{36}100 \approx 4.81125 \text{ y } A(10) = \frac{100}{16} = 6.25.$$

Vemos entonces que la máxima área encerrada es cuando $x = 10$, es decir, sólo se construye el cuadrado.
Y la mínima área encerrada es cuando $x = 4.34965$. Se construyen ambas figuras.

□