CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E0500, 9 ENERO 2001, 19H

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$, determine
   (a) Dominio, raíces, paridad
   (b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
   (c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión
   (d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades
   (e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales
   (f) Máximos y mínimos relativos y absolutos
   (g) Esbozo gráfico y rango

(2) A las 13 : 00 horas, el barco A se encuentra 30 km al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 km/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 km/h. ¿A qué hora se alcanza la mínima distancia entre las dos embarcaciones?

(3) Encontrar las intersecciones con los ejes de la recta tangente a la curva:

$$\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{x+3}} + xy + y^4 = 4$$

en el punto $(1, 1)$.

(4) Una partícula se mueve en línea recta, y su posición instantánea está dada por la función

$$s(t) = t^3 - 3t^2 + 8\,.$$

   (a) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $s'(t) = 8$?
   (b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando su aceleración es cero?

(5) Trace una posible gráfica para una función continua $f(x)$ en su dominio: $(-\infty, 5] - \{-2, 3\}$ que satisfaga
   (a)

$$\begin{aligned} &f(5) = 3; \quad f(1) = \frac{1}{2};\\ &\lim_{x\to -2} f(x) = \infty; \quad \lim_{x\to 3} f(x) = 4;\\ &\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2; \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} &f'(1) = 0;\ f'(2) = 0;\ f'(4) = 0;\\ &f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty, -2);\\ &f'(x) > 0 \text{ si } x \in (1, 4) - \{\,3\,\}\,;\\ &f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-2, 1);\\ &f'(x) < 0 \text{ si } x \in (4, 5). \end{aligned}$$

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica, los máximos y mínimos locales, y absolutos.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(6) Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área en el instante en que el valor de ésta es $\sqrt{75}$ cm^2?

Respuestas

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$, determine:

(a) Dominio, raíces, paridad

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{ 0 \}$.

Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = (-2)^{\frac{1}{3}} = -(2)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2}.$$

Paridad: puesto que $f(1) = \dfrac{1+2}{1} = 3$ & $f(-1) = \dfrac{-1+2}{-1} = -1$, entonces no se cumple ni $f(1) = f(-1)$ ni $f(-1) = -f(-1)$. Con lo cual, la función no es ni par ni impar.

(b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

▼ Podemos escribir.

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x} = x^2 + \frac{2}{x};$$

derivamos esta última expresión

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3-2}{x^2} = 2(x-1)\frac{x^2+x+1}{x^2};$$

el discriminante de la cuadrática $x^2 + x + 1$ es:

$$1^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la cuadrática no tiene raíces reales y se ve que siempre es positiva.

Por ejemplo, en $x = 0$ vale $1 > 0$.

Por lo tanto el signo de la derivada viene dado por el factor $x - 1$.

Concluimos entonces que:

$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 1) - \{ 0 \} \Rightarrow f(x)$ es decreciente si $x \in (-\infty, 0)$ y $x \in (0, 1)$;

$f'(x) > 0$ si $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x)$ es creciente si $x \in (1, +\infty)$.

(c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión

▼ Calculamos la segunda derivada a partir de $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = 2x - 2x^{-2}$

$$f''(x) = 2 + 4\frac{1}{x^3} = \frac{2x^3+4}{x^3} = \frac{2}{x^2}\frac{x^3+2}{x} = \frac{2}{x^2}\frac{(x+2^{\frac{1}{3}})(x^2 - 2^{\frac{1}{3}}x + 2^{\frac{2}{3}})}{x}.$$

La cuadrática $x^2 - 2^{\frac{1}{3}}x + 2^{\frac{2}{3}}$ tiene discriminante:

$$2^{\frac{2}{3}} - 4 \times 2^{\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow \text{ no tiene raíces reales y además siempre es positiva.}$$

Por ejemplo en, $x = 0$ vale $2^{\frac{2}{3}} > 0$.

Así, el signo de la segunda derivada viene dado por $x + 2^{\frac{1}{3}}$ & x.

Usamos la tabla siguiente para ver el signo de la segunda derivada:

	Signo de		
Intervalo	$x-(-\sqrt[3]{2})$	x	$f''(x)$
$x<-\sqrt[3]{2}\,(<0)$	$-$	$-$	$+$
$-\sqrt[3]{2}<x<0)$	$+$	$-$	$-$
$x>0\,(>-\sqrt[3]{2})$	$+$	$+$	$+$

Vemos entonces que:
$f''(x)>0$ si $x\in\left(-\infty,-\sqrt[3]{2}\right)\bigcup(0,+\infty)\Rightarrow f(x)$ es cóncava hacia arriba ahí;
$f''(x)<0$ si $x\in\left(-\sqrt[3]{2},0\right)\Rightarrow f(x)$ es cóncava hacia abajo ahí;
En $x=-\sqrt[3]{2}$ hay un punto de inflexión.

(d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades
▼ La función es continua en todo su dominio y en $x=0$ tiene una discontinuidad esencial.

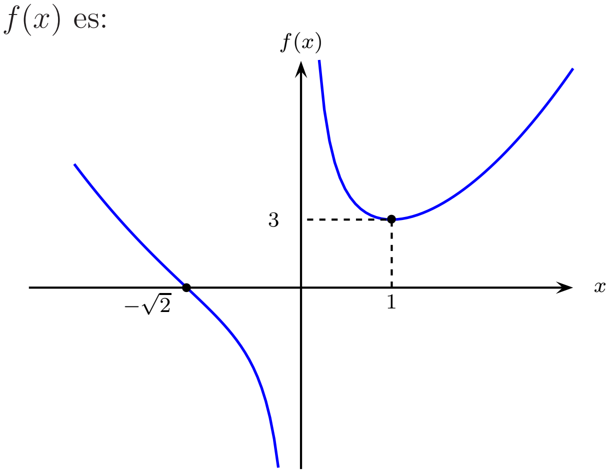
(e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales
▼ Vemos que

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to0^-}x^2+\lim_{x\to0^-}\frac{2}{x}=-\infty\,;$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=0+\lim_{x\to0^+}\frac{2}{x}=+\infty\,;$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x^2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=+\infty\,;$$

$x=0$ es una asíntota vertical y no tiene asíntotas horizontales.

(f) Máximos y mínimos relativos y absolutos
▼ Analizando el cambio de signo de la primera derivada, vemos que $x=1$ es un mínimo local. No existen máximos ni mínimos absolutos.

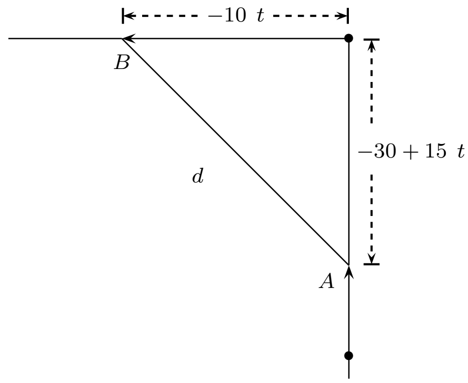
(g) Esbozo gráfico y rango
▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



El rango: $R_f=\mathbb{R}$

(2) A las 13 : 00 horas, el barco A se encuentra 30 km al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 km/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 km/h. ¿A qué hora se alcanza la mínima distancia entre las dos embarcaciones?

▼ Observamos, al bosquejar una figura con estos datos que:



la posición inicial del barco A es $(0, -30)$. En el instante t, se encuentra en la posición $(0, -30 + 15t)$.

La posición inicial del barco B es $(0, 0)$, según la figura. En el instante t, se encuentra en la posición $(-10t, 0)$.

La distancia entre los dos barcos es:

$$d = \sqrt{(-10t)^2 + (-30 + 15t)^2} = \sqrt{100t^2 + 900 - 900t + 225t^2} = \sqrt{325t^2 - 900t + 900}\,.$$

Ésta es la función de la que deseamos calcular el mínimo. Sin embargo vamos a trabajar con la función $D = d^2$ que tiene el mismo comportamiento.

$$D = d^2 = 325t^2 - 900t + 900.$$

Derivamos

$$D' = 650t - 900 \text{ y después}$$

calculamos el punto crítico

$$650t - 900 = 0 \Rightarrow t = \frac{900}{650} = \frac{18}{13} \approx 1.385.$$

Sabemos que es un mínimo, puesto que al calcular la segunda derivada:

$$D'' = 650 > 0$$

es decir, los barcos están más cercanos a las $14 : 385$ horas.

□

(3) Encontrar las intersecciones con los ejes de la recta tangente a la curva:

$$\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{x + 3}} + xy + y^4 = 4$$

en el punto $(1, 1)$.

▼ Primero vamos a comprobar que el punto $(1, 1)$ satisface la ecuación, es decir, que se encuentra sobre la gráfica de la función $y = f(x)$ definida implícitamente.

$$\sqrt{1 + 1^2 + \sqrt{1 + 3}} + 1 \times 1 + 1^4 = \sqrt{2 + 2} + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 4.$$

Ahora vamos a derivar implícitamente la ecuación dada:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x^2+\sqrt{x+3}}}\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)+xy'+y+4y^3y'=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'(x+4y^3)=-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2+\sqrt{x+3}}}\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)-y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'=\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2+\sqrt{x+3}}}\left(2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)-y}{x+4y^3}\,.$$

Evaluamos esta derivada en el punto $(1,1)$, es decir, al sustituir $x=1$ y $y=1$ en la derivada, obtenemos:

$$y'(1,1)=\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{4}}\left(2+\dfrac{1}{2\sqrt{4}}\right)-1}{1+4}=\frac{-\dfrac{1}{4}\left(2+\dfrac{1}{4}\right)-1}{5}=$$
$$=\frac{-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{9}{4}\right)-1}{5}=\frac{-\dfrac{9}{16}-\dfrac{16}{16}}{5}=\frac{-\dfrac{25}{16}}{5}=-\frac{5}{16}\,.$$

La ecuación solicitada de la recta tangente es

$$y-1=-\frac{5}{16}(x-1)\Rightarrow y=-\frac{5}{16}x+\frac{5}{16}+1\Rightarrow y=-\frac{5}{16}x+\frac{21}{16}\,.$$

La ordenada en el origen es $y=\dfrac{21}{16}$.
La abscisa en el origen es cuando:

$$-\frac{5}{16}x+\frac{21}{16}=0\Rightarrow -5x=-21\Rightarrow x=\frac{-21}{-5}=\frac{21}{5}\,.$$

□

(4) Una partícula se mueve en línea recta, y su posición instantánea está dada por la función

$$s(t)=t^3-3t^2+8\,.$$

(a) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $s'(t)=8$?

▼ Se tiene

$$v(t)=s'(t)=3t^2-6t$$

por lo tanto

$$v(t)=8\Rightarrow 3t^2-6t=8\Rightarrow 3t^2-6t-8=0.$$

Los ceros de esta cuadrática son:

$$\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(3)(-8)}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{36+96}}{6}\approx\frac{6\pm 11.489}{6}=\begin{cases}2.915\\ -0.915.\end{cases}$$

Tomando el valor positivo:

$$s(2.915)=(2.915)^3-3(2.915)^2+8=7.277\,,$$

la partícula se encuentra a la derecha del origen 7.27 unidades.

(b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando su aceleración es cero?

▼ Tenemos que

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 6.$$

Así

$$a(t) = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Tenemos entonces:

$$v(1) = 3 - 6 = -3,$$

es decir, la partícula se está moviendo en el sentido negativo del eje.

(5) Trace una posible gráfica para una función continua $f(x)$ en su dominio: $(-\infty, 5] - \{-2, 3\}$ que satisfaga

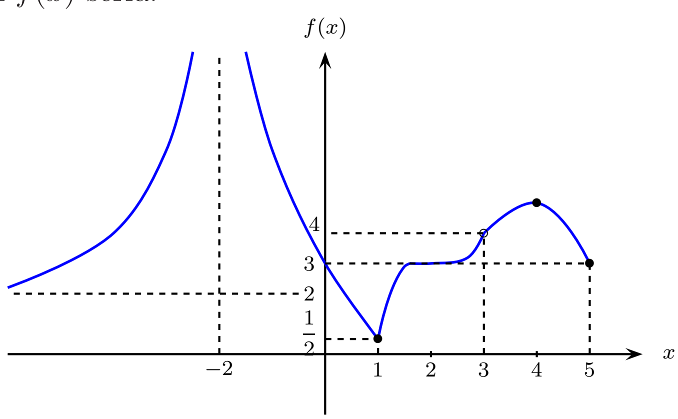
(a)

$$f(5) = 3, \quad f(1) = \frac{1}{2};$$
$$\lim_{x \to -2} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 3} f(x) = 4;$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2;$$

(b)

$$f'(1) = 0,\ f'(2) = 0,\ f'(4) = 0;$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty, -2);$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (1, 4) - \{3\};$$
$$f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-2, 1);$$
$$f'(x) < 0 \text{ si } x \in (4, 5).$$

▼ Una gráfica de la función $f(x)$ sería:



Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica, los máximos y mínimos locales, y absolutos.

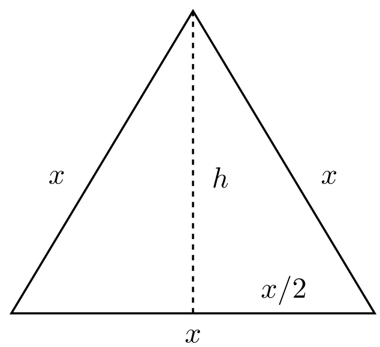
La función es cóncava hacia arriba si $x \in (-\infty, -2) \bigcup \left(-2, \frac{3}{2}\right) \bigcup (2, 3)$.

La función es cóncava hacia abajo si $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \bigcup (3, 5)$.

En $x = 1$ hay un mínimo local. Es también un mínimo absoluto.
En $x = 4$ hay un máximo local.
La función no tiene máximos absolutos.

(6) Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área en el instante en que el valor de ésta es $\sqrt{75}$ cm^2?

▼ LLevemos estos datos a la siguiente figura:



El área del triángulo es un medio de la base por la altura:

$$A = \frac{1}{2}xh. \tag{A}$$

Deseamos que la función anterior dependa sólo de x. Para esto, vemos en la figura, usando el teórema de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x;$$

sustituimos este valor en (A)

$$A = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2,$$

puesto que se tiene que x es una función de t.

$$A(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t); \tag{B}$$

derivamos con respecto a t

$$A'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 \times x(t) \times x'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(t) \times x'(t). \tag{C}$$

Sabemos lo siguiente:

(a) $x'(t)$ siempre es igual a 2 cm/h.

(b) En un cierto momento, digamos t_0, el valor del área es $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.
Usamos (B) para encontrar el valor del lado del triángulo en ese momento:

$$A(t_0) = 5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t_0) \Rightarrow x^2(t_0) = 20 \Rightarrow x(t_0) = 2\sqrt{5}.$$

Sustituyendo estos valores en (C), obtenemos la variación del área deseada:

$$A'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{15}.$$