CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E0600
9-ENERO-2001, 10 H.

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$, determine:

(a) Dominio, raíces, paridad
(b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento
(c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión
(d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades
(e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales
(f) Máximos y mínimos relativos y absolutos
(g) Esbozo gráfico y rango

(2) Dos barcos salen al mismo tiempo y a velocidad constante; uno parte de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 25 km/h. El otro parte a 20 km/h hacia el muelle, desde un punto que se encuentra a 100 km al oeste.
¿En qué momento se encuentran más cercanos?

(3) Encontrar las intersecciones con los ejes de la recta tangente a la curva:

$$\sqrt{3 - 2x^2 + 6\sqrt{x+1}} + 3x^2y^3 - 3y = 0$$

en el punto $(0, 1)$.

(4) Una partícula se mueve en línea recta y su posición instantánea está dada por la función

$$s(t) = t^2 - 4t - 5.$$

(a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?
(b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando su velocidad es cero?

(5) Trace una posible gráfica para una función continua $f(x)$ en su dominio: $[-4, \infty) - \{\,-3, 2\,\}$ y que satisfaga

(a)

$$f(-4) = 2 \qquad f(1) = -1$$
$$\lim_{x\to -3} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 1$$

(b)

$$f'(-2) = 0 \quad ; \; f'(-1) = 0 \quad ; \; f'(1) = 0$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-4, -2) - \{-3\} \qquad f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-2, 1) - \{-1\}$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (1, 2) \qquad f'(x) < 0 \text{ si } x \in (2, \infty)$$

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica y los máximos y mínimos locales y absolutos.

(6) Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h.
¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide 8 cm?

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$, determine:

(a) Dominio, raíces, paridad

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Raíces: $x = 0$.

Paridad: puesto que $f(2) = \dfrac{2}{1^2} = 2$ y $f(-2) = \dfrac{-2}{(-3)^2} = -\dfrac{2}{9}$;

no se cumple $f(2) = f(-2)$ ni $f(2) = -f(-2)$. Es decir, la función no es par ni es impar. Es claro que no puede ser par ni impar pues el dominio no es simétrico con respecto al origen.

(b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

▼ Derivamos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-1)^2(1) - x\,[2(x-1)]}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{(x-1)\,[(x-1) - 2x]}{(x-1)^4} = \frac{-x-1}{(x-1)^3} = -\frac{x+1}{(x-1)^3} = \\
&= -\frac{x+1}{x-1}\frac{1}{(x-1)^2}\,;
\end{aligned}
$$

vemos que el signo de la derivada se proporciona por $x+1$ y $x-1$ y el signo exterior. Usamos la tabla siguiente:

Intervalo	$x+1$	$x-1$	$-$	signo de $f'(x)$
$x < -1\,(< 1)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-1 < x < 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x > 1\,(> -1)$	$+$	$+$	$-$	$-$

Concluimos entonces que:

La función es decreciente para $x \in (-\infty, -1)$ y $x \in (1, +\infty)$.

La función es creciente para $x \in (-1, 1)$.

(c) Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión

▼ Calculamos la segunda derivada

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{(x-1)^3(1) - (x+1)\,[3(x-1)^2]}{(x-1)^6} = \\
&= -\frac{(x-1)^2\,[(x-1) - 3(x+1)]}{(x-1)^6} = -\frac{-2x-4}{(x-1)^4} = \\
&= 2\frac{x+2}{(x-1)^4} = (x+2)\frac{2}{(x-1)^4}\,;
\end{aligned}
$$

vemos que el signo de la segunda derivada se proporciona por el factor $x+2$. Por lo tanto:

La función es cóncava hacia abajo para $x \in (-\infty, -2)$.

La función es cóncava hacia arriba para $x \in (-2, +\infty)$.

En $x = -2$ hay un punto de inflexión $[-2, f(-2)] = \left(-2, -\dfrac{2}{9}\right)$.

(d) Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades

▼ La función es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$.

$x = 1$ es una discontinuidad esencial infinita pues $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

(e) Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales

▼ Si escribimos $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{1}{x - 2 + \frac{1}{x}}$ vemos que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^{\pm}.$$

Así: $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

También se comprueba que $x = 1$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

(f) Máximos y mínimos relativos y absolutos

▼ $x = -1$ es un punto crítico, ya que $f'(-1) = 0$.

De la tabla anterior se desprende que la primera derivada cambia de signo en este punto de menos a más. Con esto podemos decir que $x = -1$ es un mínimo local. De hecho, conjuntando información que obtendremos inmediatamente, es un mínimo absoluto.

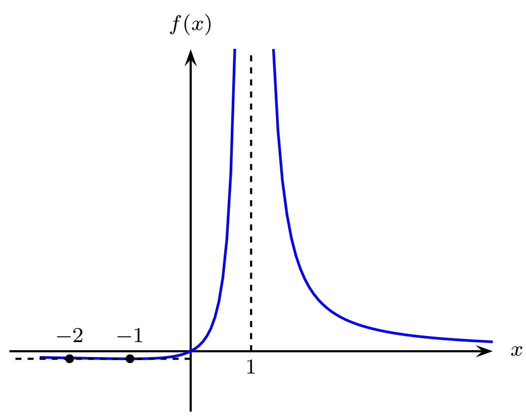
La función no tiene máximo absoluto.

(g) Esbozo gráfico y rango

▼ Evaluamos la función $f(x)$ en algunos puntos:

x	$f(x)$
0	0
-1	$-\frac{1}{4}$

La gráfica de $f(x)$ es:

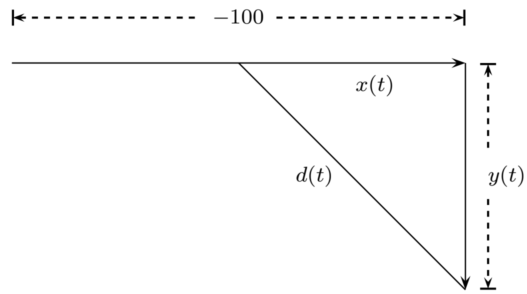


Rango: $R_f = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

(2) Dos barcos salen al mismo tiempo y a velocidad constante; uno parte de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 25 km/h. El otro parte a 20 km/h hacia el muelle, desde un punto que se encuentra a 100 km al oeste.

¿En qué momento se encuentran más cercanos?

▼ Con los datos, hacemos la figura



De ella se desprende que $x(t) = -100 + 20t$ y que $y(t) = -25t$.
Además la distancia entre los barcos es

$$d(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} = \sqrt{(-100 + 20t)^2 + (-25t)^2}\,.$$

Ésta es la función de la que deseamos calcular el mínimo.
Derivamos:

$$\begin{aligned} d'(t) &= \frac{2(-100 + 20t)20 + 2(-25t)(-25)}{2\sqrt{(-100 + 20t)^2 + (-25t)^2}} = \\ &= \frac{-2\,000 + 400t + 625t}{\sqrt{(-100 + 20t)^2 + (-25t)^2}}\,. \end{aligned}$$

Calculamos los puntos críticos, haciendo $d'(t) = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{-2\,000 + 400t + 625t}{\sqrt{(-100 + 20t)^2 + (25t)^2}} = 0 \Rightarrow -2\,000 + 400t + 625t = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1\,025(t - 1.\overline{95121}) = 0 \Rightarrow t = 1.\overline{95121}). \end{aligned}$$

Vemos que la derivada cambia de signo en este punto de negativo a positivo, con lo cual concluimos que se tiene un tiempo mínimo ahí.

□

(3) Encontrar las intersecciones con los ejes de la recta tangente a la curva:

$$\sqrt{3 - 2x^2 + 6\sqrt{x + 1}} + 3x^2y^3 - 3y = 0$$

en el punto $(0, 1)$.

▼ Primero vamos a comprobar que el punto proporcionado se encuentra en la gráfica de la función. Para esto sustituimos las coordenadas del punto $x = 0$ y $y = 1$ en la ecuación

$$\sqrt{3 - 2 \times 0^2 + 6\sqrt{0 + 1}} + 3 \times 0^2 \times 1^3 - 3 \times 1 = \sqrt{3 + 6} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0.$$

Vamos a derivar ahora la ecuación suponiendo que define una función $y = f(x)$ de manera implícita.

$$\frac{1}{2\sqrt{3-2x^2+6\sqrt{x+1}}}\left(-4x+6\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)+3(x^2\times 3y^2y'+y^3\times 2x)-3y'=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2y^2y'+6xy^3-3y'=-\frac{1}{2\sqrt{3-2x^2+6\sqrt{x+1}}}\left(-4x+6\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (9x^2y^2-3)y'=-\frac{1}{2\sqrt{3-2x^2+6\sqrt{x+1}}}\left(-4x+6\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)-6xy^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{3-2x^2+6\sqrt{x+1}}}\left(-4x+6\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)-6xy^3}{9x^2y^2-3}\,.$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función definida implícitamente que pasa por el punto $(0, 1)$ sustituimos las coordenadas $x = 0$ & $y = 1$ en la derivada anterior

$$y'(0,1)=\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{9}}(6\frac{1}{2})}{-3}=\frac{3}{6\sqrt{9}}=\frac{1}{6}\,.$$

La ecuación deseada de la recta tangente es

$$y-1=\frac{1}{6}x \Rightarrow y=\frac{1}{6}x+1.$$

En esta ecuación,
si $x = 0 \Rightarrow y = 1$;
si $y = 0 \Rightarrow x = -6$.
Los cortes deseados a los ejes son $(0, 1)$ & $(-6, 0)$.

□

(4) Una partícula se mueve en línea recta y su posición instantánea está dada por la función

$$s(t) = t^2 - 4t - 5\,.$$

(a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?

▼ La velocidad de la partícula se calcula

$$v(t) = s'(t) = 2t - 4.$$

Para conocer el tiempo t en el que la partícula satisface $s(t) = 7$ resolvemos:

$$s(t)=7 \Rightarrow t^2-4t-5=7 \Rightarrow t^2-4t-12=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (t-6)(t+2)=0 \Rightarrow t=6 \text{ o bien } t=-2.$$

Como el problema no tiene restricciones, consideramos los dos valores encontrados (los valores negativos representan el pasado con respecto a $t = 0$), entonces

$$v(6) = s'(6) = 12 - 4 = 8\,;$$
$$v(-2) = s'(-2) = -4 - 4 = -8.$$

(b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando su velocidad es cero?

▼ La velocidad es cero cuando:

$$v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2.$$

La posición en este momento es

$$s(2) = 2^2 - 4 \times 2 - 5 = 4 - 8 - 5 = -9.$$

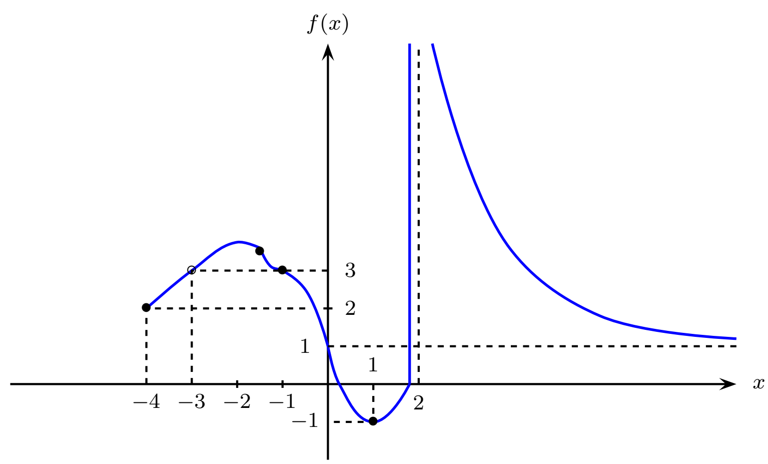
(5) Trace una posible gráfica para una función continua $f(x)$ en su dominio: $[-4, \infty) - \{-3, 2\}$ y que satisfaga:
(a)

$$f(-4) = 2\,; \qquad f(1) = -1\,;$$
$$\lim_{x \to -3} f(x) = 3\,; \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = +\infty\,;$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1\,.$$

(b)

$$f'(-2) = 0\,; f'(-1) = 0\,; f'(1) = 0\,;$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-4, -2) - \{-3\}\,; \qquad f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-2, 1) - \{-1\}\,;$$
$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (1, 2)\,; \qquad f'(x) < 0 \text{ si } x \in (2, \infty)\,.$$

▼ Una gráfica posible de la función $f(x)$ es:



noindent Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica; los máximos y mínimos locales, y absolutos.

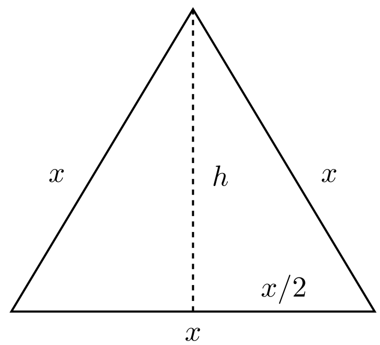
$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-\dfrac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$;

$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $\left(-4, -\dfrac{3}{2}\right)$, y en $(-1, 0)$.

Hay un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = -1$ que es mínimo absoluto.

(6) Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h.
¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide 8 cm?

▼ Veamos esos datos con la siguiente figura



De ella tenemos

$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

El área del triángulo es un medio de la base por la altura:

$$A = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Estamos suponiendo que los lados x dependen del tiempo $x(t)$, de hecho crecen. Por lo tanto, el área también depende del tiempo:

$$A(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t).$$

Derivando con respecto a t tenemos

$$A'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}2x(t)x'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(t) \times x'(t).$$

Si suponemos que en un tiempo t_8, no conocido, se tiene $x(t_8) = 8$, en ese tiempo se tiene también $x'(t_8) = 2$. Por lo tanto:

$$A'(t_8) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(t_8) \times x'(t_8) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 \times 2 = 8\sqrt{3} \approx 13.856406 \quad \mathrm{cm}^2/\mathrm{hora}\,.$$