CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E0700
2-MAYO-2001, 13 H

(1) Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$, determinar:
Intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos locales; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión; asíntotas verticales y asíntotas horizontales. A partir del análisis anterior, hacer un esbozo de la gráfica de f.

(2) Un trozo de alambre de 10 m de largo, se corta en dos partes; una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cuánto debe medir cada parte para que el área total encerrada sea: (a) máxima, (b) mínima?

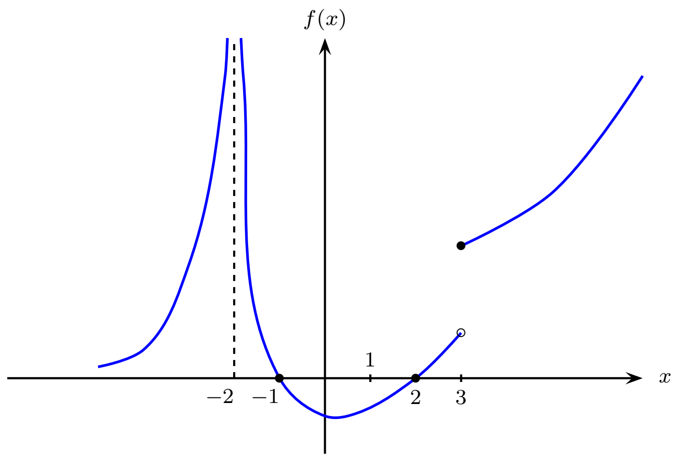
(3) De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de un objeto que viaja a una velocidad v, está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \ ,$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.
(a) Explicar qué ocurre cuando v se acerca a la velocidad de la luz
(b) Explicar por qué sólo tiene sentido calcular $\lim\limits_{v \to c^-} m$

(4) Un incendio forestal se extiende en forma circular, con un radio que aumenta con una rapidez de 5 pies/min. ¿Con qué rapidez está cambiando el área incendiada, cuando el radio es de 200 pies? ¿Está aumentando o disminuyendo?

(5) Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ cuya primera derivada f' tiene la siguiente gráfica:



A partir de esta gráfica de f', determinar dónde la función f es creciente y dónde es decreciente. Explicar además, cómo es la tangente a la gráfica de f en $x = -2$, $x = -1$, $x = 2$ & $x = 3$.

---
canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^3}$, determinar:
Intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos locales; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión; asíntotas verticales y asíntotas horizontales. A partir del análisis anterior, hacer un esbozo de la gráfica de f.

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.
Raíces o ceros de $f(x)$

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}\,.$$

Podemos escribir

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} = x^{-1} - 3x^{-3}.$$

Derivamos

$$f'(x) = -x^{-2} + 9x^{-4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^4} = \frac{-x^2+9}{x^4} \qquad (*)$$

y de aquí calculamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

El signo de la derivada viene dado por la expresión $-(x^2-9) = -(x+3)(x-3)$. Usamos entonces la tabla

	Signo de			
Intervalo	$-$	$x+3$	$x-3$	$-(x+3)(x-3)$
$x < -3\,(< 3)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-3 < x < 3$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x > 3\,(> -3)$	$-$	$+$	$+$	$-$

Vemos entonces que
$f(x)$ es decreciente para $x \in (-\infty, -3)$ y para $x \in (3, +\infty)$;
$f(x)$ es creciente para $x \in (-3, 0)$ y para $x \in (0, 3)$.
Con estos datos concluimos que
$x = -3$ es un mínimo local;
$x = 3$ es un máximo local.
Para calcular la segunda derivada, derivamos $(*)$:

$$f''(x) = 2x^{-3} - 36x^{-5} = \frac{2}{x^3} - \frac{36}{x^5} = \frac{2x^2 - 36}{x^5}\,.$$

Para calcular los puntos de inflexión

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 18) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}.$$

La segunda derivada se factoriza entonces

$$f''(x) = 2\frac{(x + 3\sqrt{2})(x - 3\sqrt{2})}{x^5}\,.$$

El signo de la segunda derivada viene dado por $x+3\sqrt{2}$, $x-3\sqrt{2}$ & x. Usamos la tabla para conocer el signo de $f''(x)$

	Signo de			
Intervalo	$x+3\sqrt{2}$	x	$x-3\sqrt{2}$	$f''(x)$
$x<-3\sqrt{2}\,(<0<3\sqrt{2})$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-3\sqrt{2}<x<0\,(<3\sqrt{2})$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(-3\sqrt{2})\ <0<x<3\sqrt{2}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x>3\sqrt{2}\,(>0>-3\sqrt{2})$	$+$	$+$	$+$	$+$

Vemos entonces que
$f(x)$ es cóncava hacia abajo para $x\in\left(-\infty,-3\sqrt{2}\right)\bigcup\left(0,3\sqrt{2}\right)$;
$f(x)$ es cóncava hacia arriba para $x\in\left(-3\sqrt{2},0\right)\bigcup\left(3\sqrt{2},+\infty\right)$.
Con estos datos concluimos que
$x=-3\sqrt{2}$ & $x=-3\sqrt{2}$ son puntos de inflexión.
Calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{x^3}=0^{\pm}.$$

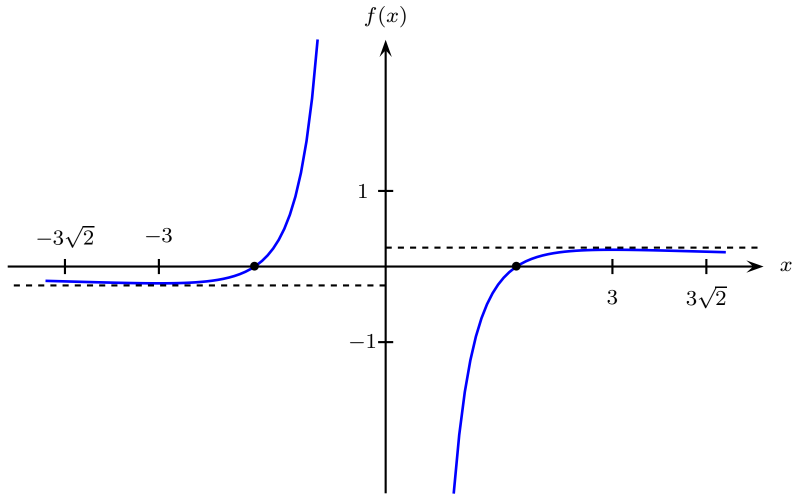
Por lo tanto, $y=0$ es una asíntota horizontal.
Vemos claramente que una asíntota vertical es $x=0$. Calculamos los siguiente límites para ver los comportamientos laterales de la función en este caso

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\text{“}\left(\frac{-3}{0^-}\right)\text{”}=+\infty;$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\text{“}\left(\frac{-3}{0^+}\right)\text{”}=-\infty.$$

Con todo la anterior vamos a hacer un bosquejo de la gráfica.
Calculamos la función en algunos puntos:

x	$f(x)$
$\sqrt{3}$	0
3	0.2222
$3\sqrt{2}$	0.196

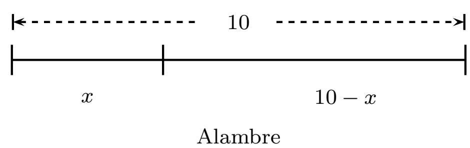
La función es impar.
La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(2) Un trozo de alambre de 10 m de largo, se corta en dos partes; una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cuánto debe medir cada parte para que el área total encerrada sea: (a) máxima, (b) mínima?

▼ Tomamos un alambre de 10 m de largo y lo dividimos en dos pedazos como se ve en la figura siguiente:



Con los pedazos formamos las figuras:

Si se tiene una pedazo de alambre de longitud x y formamos un cuadrado, cada lado mide $\dfrac{x}{4}$. Si se tiene otro pedazo de alambre de longitud $10-x$ y formamos un triángulo equilátero, cada lado mide $\dfrac{10-x}{3}$. Para calcular la altura del triángulo usamos el teorema de Pitágoras, con lo que tenemos:

$$h^2 = \left[\frac{1}{3}(10-x)\right]^2 - \left[\frac{1}{6}(10-x)\right]^2 = (\frac{1}{9} - \frac{1}{36})(10-x)^2 = \frac{3}{36}(10-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x).$$

El área encerrada por ambas figuras es:

$$A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(10 - x) \times \frac{\sqrt{3}}{6}(10 - x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(10 - x)^2.$$

Ésta es la función de la que deseamos calcular su máximo y mínimo absolutos.
Dominio de esta función: $D_A = [0, 10]$.
Cuando $x = 0$, formamos sólo el triángulo y cuando $x = 10$, formamos sólo el cuadrado.
Calculamos la derivada

$$A'(x) = \frac{1}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{18}(10 - x)(-1) = \frac{1}{8}x - \frac{10\sqrt{3}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{18}x = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9}. \qquad (*)$$

Calculamos la segunda derivada

$$A''(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{72} > 0.$$

Lo cual nos indica que la función $A(x)$ es cóncava hacia arriba. El punto crítico que encontraremos será un mínimo absoluto.
Igualamos a cero la primera derivada usando $(*)$:

$$\frac{9 + 4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} = 0 \Rightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}} \approx 4.35.$$

Es necesario evaluar la función $A(x)$ en los extremos de su dominio para compararlos entre sí:

$$A(0) = \frac{25\sqrt{3}}{9} \approx 4.811.$$

$$A(10) = \frac{100}{16} = \frac{10}{4} = 6.25.$$

Evaluamos en el mínimo también

$$A\left(\frac{40\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}}\right) \approx 2.719$$

y entonces:

(a) El área máxima encerrada es cuando formamos un cuadrado de lado $\frac{10}{4}$.

(b) El área mínima encerrada es cuando se forma un cuadrado con un perímetro de longitud $\frac{40\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}}$ y con el resto del alambre formamos el triángulo.

□

(3) De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de un objeto que viaja a una velocidad v, está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ ,$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.

(a) Explicar qué ocurre cuando v se acerca a la velocidad de la luz

▼ Calculamos:

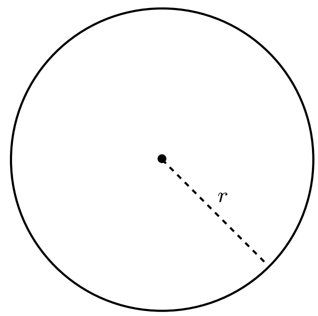
$$\lim_{v \to c^-} m = \lim_{v \to c^-} \frac{cm_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = +\infty.$$

(b) Explicar por qué sólo tiene sentido calcular $\lim\limits_{v \to c^-} m$

▼ Puesto que $v < c$.

(4) Un incendio forestal se extiende en forma circular, con un radio que aumenta con una rapidez de 5 pies/min. ¿Con qué rapidez está cambiando el área incendiada, cuando el radio es de 200 pies? ¿Está aumentando o disminuyendo?

▼ La figura relacionada con el incendio es:



La relación entre el área del incendio y el radio del mismo es

$$A(r) = \pi r^2.$$

Pero el radio está cambiando a una velocidad conocida de 5 pies/min. Es decir, depende del tiempo, es una función del tiempo. Por lo tanto el área depende también del tiempo:

$$A(t) = \pi r^2(t).$$

Podemos entonces derivar esta expresión

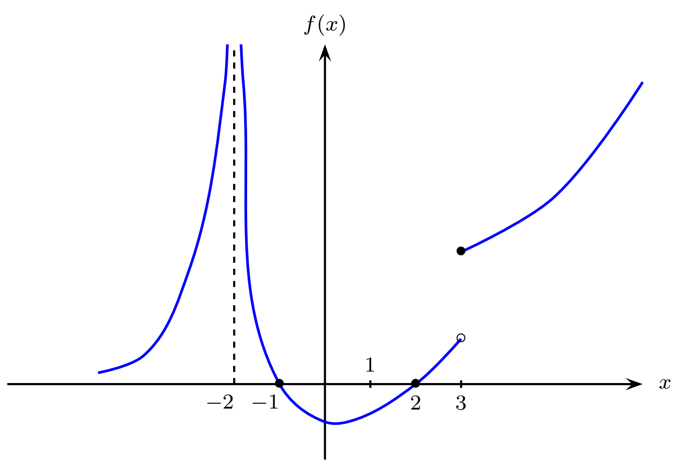
$$A'(t) = 2\pi r(t)r'(t).$$

Ésta es una relación entre derivadas para todo t.
En particular, en un momento t_0 se tienen los datos especificados en el enunciado:

$$A'(t_0) = 2\pi r(t_0)r'(t_0) = 2 \times \pi \times 200 \times 5 = 2000 \times \pi \text{ pies}^2/\text{min.} > 0.$$

El área está aumentando en ese momento t_0.

(5) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ cuya primera derivada f' tiene la siguiente gráfica:



A partir de esta gráfica de f', determinar dónde la función f es creciente y dónde es decreciente. Explicar además, cómo es la tangente a la gráfica de f en $x = -2$, $x = -1$, $x = 2$ & $x = 3$.

▼ La función es creciente cuando la derivada es positiva;
para $x \in (-\infty, -2) \bigcup (-2, -1) \bigcup (2, +\infty)$.

La función es decreciente cuando la derivada es negativa, es decir, para $x \in (-1, 2)$.

En $x = -2$ la tangente es vertical.
En $x = -1$ la tangente es horizontal, paralela al eje x, con pendiente cero.
De hecho tiene aquí un máximo local porque la derivada cambia de signo de positivo a negativo.

En $x = 2$ la tangente es horizontal, paralela al eje x, con pendiente cero.
De hecho tiene aquí un mínimo local porque la derivada cambia de signo de negativo a positivo.

En $x = 3$ la tangente no existe. La gráfica tiene un salto. Por la izquierda tiene pendiente ≈ 1 y por la derecha tiene pendiente $\approx \frac{1}{2}$.