# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
# EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E0800

(1) Dibujar una función $f(x)$ que cumpla las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 3} f(x) = -\infty;$$
$$f(x) \text{ tiene una discontinuidad removible en } x = 0\ ;$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -2;$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ .

(3) Si

$$f(x) = \begin{cases} mx - n & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ 2mx + n & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Encontrar los valores $m$, $n$ de modo que la función sea continua. Graficar la función continua obtenida.

(4) Encontrar la derivada de la función $f(z) = \dfrac{\sqrt{z} + 1}{(\sqrt{z} + 3)^2}$.

(5) La altura de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 256t$$

en donde $s$ se mide en pies y $t$ en segundos.
  (a) ¿Cuál es la velocidad media del proyectil entre $t = 2$ y $t = 5$?
  (b) ¿En qué instante choca contra el suelo?
  (c) ¿Cuál es la velocidad del impacto?

(6) Dada la función $f(x) = x^5 + x - 1$, verifique que existe un número $c$ tal que $f(c) = 0$. Es decir, justifique que la función tiene una raíz.

(7) Encontrar una ecuación de la recta tangente en el punto $(-2, 2)$ a la gráfica de la función definida por

$$x^4 + y^3 = 24.$$

(8) Sea la función

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 1\,.$$

  (a) Encontrar los intervalos de monotonía de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es creciente y aquellos donde es decreciente.
  (b) Encontrar los intervalos de concavidad de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es cóncava hacia abajo y aquellos donde es cóncava hacia arriba.
  (c) Hacer un bosquejo de la gráfica de la función.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(9) Una escalera de 3 m se apoya sobre un muro de una casa. El pie de la escalera se separa de la base del muro a razón de 2 m/s. ¿A qué razón se desliza la parte superior de la escalera por el muro, cuando el pie de la misma está a 1 m del muro?

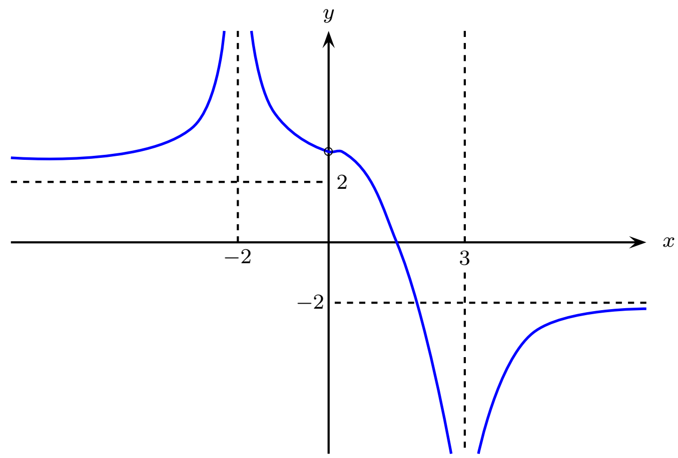
(10) Encuentre las dimensiones de la lata cilíndrica para jugo y que utilice la menor cantidad de material cuando el volumen del envase es de 30 $cm^3$.

## Respuestas

(1) Dibujar una función $f(x)$ que cumpla las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 3} f(x) = -\infty;$$
$f(x)$ tiene una discontinuidad removible en $x = 0$ ;
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -2;$$

▼ Una gráfica posible de la función $f(x)$, con esas condiciones es:




□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ .

▼ Si tratamos de calcular el límite por evaluación obtenemos:

$$\frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 - 1} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{ una indeterminación “}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Esto nos dice que los polinomios del numerador y del denominador, ambos, tienen la raíz común $x = 1$. En este caso es fácil encontrar la factorización del factor común $x - 1$:

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1} .$$

La igualdad anterior se cumple para $x \neq 1$. Por lo tanto podemos usar este hecho para calcular el límite.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} .$$

(3) Si

$$f(x) = \begin{cases} mx - n & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ 2mx + n & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Encontrar los valores $m$, $n$ de modo que la función sea continua. Graficar la función continua obtenida.

▼ Ésta es una función que consta de dos “pedazos” y ambos son funciones continuas. De hecho son rectas. Para que la función sea continua en todos los reales se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

La igualdad de la izquierda nos proporciona:

$$m - n = 5.$$

La igualdad de la derecha nos proporciona:

$$5 = 2m + n.$$

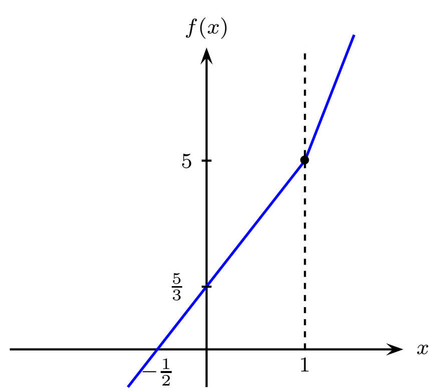
Ordenando, tenemos:

$$\begin{aligned} m - n &= 5 \\ 2m + n &= 5, \end{aligned}$$

es decir, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es: $m = \dfrac{10}{3}$ & $n = -\dfrac{5}{3}$ .
La función con estos valores es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{3}x + \dfrac{5}{3} & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{20}{3}x - \dfrac{5}{3} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La función $f(x)$ con esos valores tiene la siguiente gráfica:




$\square$

(4) Encontrar la derivada de la función $f(z) = \dfrac{\sqrt{z} + 1}{(\sqrt{z} + 3)^2}.$

▼ Derivamos

$$f'(z) = \frac{(\sqrt{z}+3)^2\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right) - (\sqrt{z}+1)2(\sqrt{z}+3)\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)}{[(\sqrt{z}+3)^2]^2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{z}+3)\left[(\sqrt{z}+3)\frac{1}{2\sqrt{z}} - (\sqrt{z}+1)\frac{1}{\sqrt{z}}\right]}{(\sqrt{z}+3)^4} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{z}+3}{2\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}}}{(\sqrt{z}+3)^3} = \frac{\frac{\sqrt{z}+3-2(\sqrt{z}+1)}{2\sqrt{z}}}{(\sqrt{z}+3)^3} =$$

$$= \frac{-\sqrt{z}+1}{2\sqrt{z}(\sqrt{z}+3)^3}\,.$$

□

(5) La altura de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 256t,$$

en donde $s$ se mide en pies y $t$ en segundos.

(a) ¿Cuál es la velocidad media del proyectil entre $t = 2$ & $t = 5$?

▼ Calculamos:

$$\frac{s(5)-s(2)}{5-2} = \frac{880-448}{3} = \frac{432}{3} = 144 \text{ pies/segundo.}$$

(b) ¿En qué instante choca contra el suelo?

▼ Resolvemos:

$$-16t^2 + 256t = 0 \Rightarrow t(-16t+256) = 0.$$

Una solución es $t = 0$, cuando se suelta el proyectil. La otra se encuentra como sigue:

$$-16t + 256 = 0 \Rightarrow t = \frac{256}{16} = 16 \text{ segundos.}$$

(c) ¿Cuál es la velocidad del impacto?

▼ Calculamos la derivada $s'(t) = -32t$. Por lo tanto:

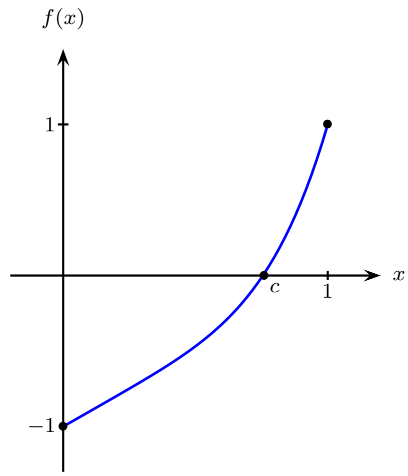
$$s'(16) = -32(16) = -512 \text{ pie/segundo.}$$

(6) Dada la función $f(x) = x^5 + x - 1$, verifique que existe un número $c$ tal que $f(c) = 0$. Es decir, justifique que la función tiene una raíz.

▼ Evaluamos la función $f(x)$ en algunos puntos:

| x | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | $-1$ |
| 1 | 1 |

Vemos que $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[0,1]$ con valores de signo distinto en los extremos; aplicando el teorema del Valor Intermedio, se asegura la existencia de $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$. Veámos la gráfica de $f(x)$ en ese intervalo:




□

(7) Encontrar una ecuación de la recta tangente en el punto $(-2, 2)$ a la gráfica de la función definida por

$$x^4 + y^3 = 24.$$

▼ Vamos a comprobar que el punto dado $(-2, 2)$ está en la gráfica de la función, definida implícitamente:

$$(-2)^4 + 2^3 = 16 + 8 = 24.$$

Derivamos la expresión implícitamente

$$4x^3 + 3y^2y' = 0 \Rightarrow 3y^2y' = -4x^3 \Rightarrow y' = -\frac{4}{3}\frac{x^3}{y^2}.$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente, evaluamos la derivada en $(-2, 2)$:

$$y'(-2, 2) = -\frac{4}{3}\frac{(-2)^3}{2^2} = -\frac{4}{3}\frac{-8}{4} = \frac{8}{3}.$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$\frac{y-2}{x-(-2)} = \frac{8}{3} \Rightarrow y - 2 = \frac{8}{3}x + \frac{16}{3} \Rightarrow y = \frac{8}{3}x + \frac{22}{3}.$$

El ejercicio no pide hacer los cálculos de manera implícita. Sin embargo en este caso podemos despejar $y$ en función de $x$:

$$y(x) = \sqrt[3]{24 - x^4} = (24 - x^4)^{\frac{1}{3}}.$$

Derivamos:

$$y' = \frac{1}{3}(24 - x^4)^{-\frac{2}{3}}(-4x^3).$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente, valuamos la derivada en $x = -2$:

$$y'(-2) = \frac{1}{3}\left[24 - (-2)^4\right]^{-\frac{2}{3}}\left[-4(-2)^3\right] = \frac{32}{3} \times \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{32}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$$

y la ecuación de la recta tangente se calcula como antes.

$\square$

(8) Sea la función

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 1\,.$$

(a) Encontrar los intervalos de monotonía de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es creciente y aquellos donde es decreciente

▼ Derivamos

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 3 = 3(x^2 + 4x + 1).$$

Para calcular los puntos críticos calculamos los ceros o raíces de la derivada, usando la fórmula de la cuadrática:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} -0.268 \\ -3.732\,. \end{cases}$$

Con estas raíces la factorización de la derivada queda como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2 + 4x + 1) = 3\left[x - (-2 - \sqrt{3})\right]\left[x - (-2 + \sqrt{3})\right] = \\ &= 3(x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Para conocer los intervalos de monotonía, usamos la siguiente tabla:

| | Signo de | | |
|---|---|---|---|
| Intervalo | $x - (-2 - \sqrt{3})$ | $x - (-2 + \sqrt{3})$ | $x^2 + 4x + 1$ |
| $x < -2 - \sqrt{3}\,(< -2 + \sqrt{3})$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $x > -2 + \sqrt{3}\,(> -2 - \sqrt{3})$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Por lo tanto, la función $f(x)$ crece para $x \in \left(-\infty, -2 - \sqrt{3}\right)$ y para $x \in \left(-2 + \sqrt{3}, +\infty\right)$; pero decrece para $x \in \left(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right)$.

(b) Encontrar los intervalos de concavidad de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es cóncava hacia abajo y aquellos donde es cóncava hacia arriba

▼ Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 6x + 12 = 6(x + 2).$$

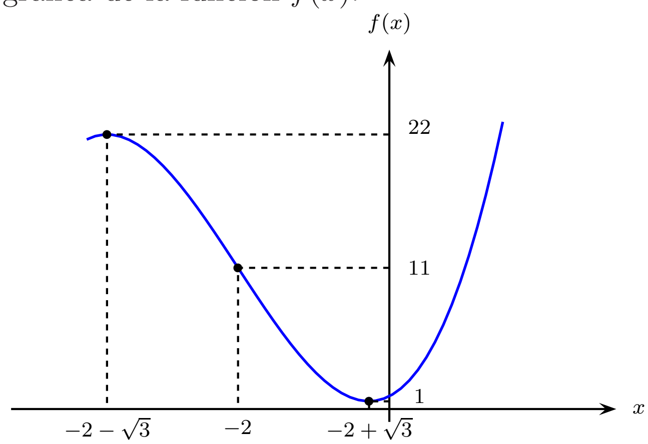
La única raíz es $x = -2$.
Se ve claro que
$f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -2)$ o sea es cóncava hacia abajo ahí;
$f''(x) > 0$ para $x \in (-2, +\infty)$ o sea es cóncava hacia arriba ahí.

(c) Hacer un bosquejo de la gráfica de la función

▼ Evaluamos la función en algunos puntos

| x | $f(x)$ |
|---|---|
| $-2-\sqrt{3}$ | 21.39 |
| $-2$ | 11 |
| $-2+\sqrt{3}$ | 0.6 |
| 0 | 1 |

y damos un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$:




□