CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E0900

(1) La posición vertical de una pelota está dada por

$$h(t) = 128 + 16t - 16t^2$$

en donde t se mide en segundos y $h(t)$ se mide en pies.
¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 32 pies arriba del suelo?

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1}$.

(3) Si $f(w) = \dfrac{\sqrt{w+1} + 3}{(w^2+1)^3}$, calcular $f'(1)$.

(4) Sea la función

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ c & \text{si } x \in [-1, 1] \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \,. \end{cases}$$

Encontrar los valores a, c que hacen que la función $g(x)$ sea continua en todos los reales.
Dar un bosquejo de la gráfica de $g(x)$ con los valores encontrados.

(5) Sea $y = f(x)$ definida implícitamente por:

$$x^4 + 3x^2y + y^3 = 5 \,.$$

Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto $(-1, 1)$.

(6) Dada la función $f(x) = -x^3 + 4x + 2$,

obtener un intervalo en donde la función tenga al menos una raíz. Justifique su respuesta.

(7) Se infla un globo esférico introduciendo aire a razón de 50 cm^3/s. Calcular la rapidez de cambio del radio del globo cuando su diámetro es de 26 centímetros.

(8) Dar un bosquejo de la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:
- $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2) \bigcup (-2, 4)$;
- $f'(x) < 0$ para $x \in (4, +\infty)$;
- $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -2$;
- $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

(9) Un terreno rectangular está delimitado por un río en un lado y por una cerca eléctrica de un solo cable en los otros tres lados.
¿Cuáles son las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima?
¿Cuál es la mayor área que pueda cercarse con un cable de 800 m?

(10) Sea la función $f(x) = 3x^4 + 8x^3$.

(a) Proporcionar el dominio y las raíces de la función
(b) Proporcionar los intervalos de monotonía
(c) Proporcionar los intervalos de concavidad

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(d) Proporcionar los máximos y mínimos absolutos y relativos
(e) Dar un bosquejo de la gráfica

Respuestas

(1) La posición vertical de una pelota está dada por

$$h(t) = 128 + 16t - 16t^2$$

en donde t se mide en segundos y $h(t)$ se mide en pies.
¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 32 pies arriba del suelo?

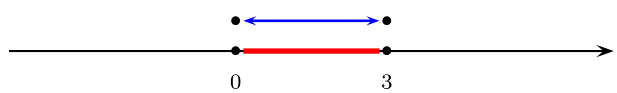
▼ Para resolver la pregunta planteada se resuelve la desigualdad:

$$h(t) = 128 + 16t - 16t^2 \geq 32 \Leftrightarrow 96 + 16t - 16t^2 \geq 0 \Leftrightarrow -96 - 16t + 16t^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16(t^2 - t - 6) \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+2) \leq 0.$$

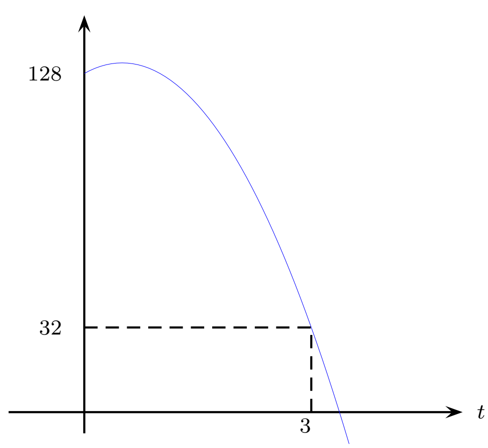
Las raíces de la cuadrática son $t = -2$ & $t = 3$.
Para resolver la última desigualdad usamos la tabla:

	Signo de		
Intervalo	$t+2$	$t-3$	$(t+2)(t-3)$
$t < -2\,(< 3)$	$-$	$-$	$+$
$-2 < t < 3$	$+$	$-$	$-$
$t > 3\,(> -2)$	$+$	$+$	$+$

La solución es $t \in [-2, 3]$.
Pero como $t \geq 0$, la solución definitiva es $t \in [0, 3]$.



Si vemos la gráfica de de la función $h(t)$



La parábola se encuentra arriba de la recta $y = 32$ para $t \in [0, 3]$.

□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1}$.

▼ Si tratamos de calcular el límite evaluando la expresión obtenemos:

$$\frac{3(1)^2+4(1)-7}{(1)^2-1} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{ una indeterminación } \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Por tratarse de una función racional, este resultado nos invita a factorizar el numerador y el denominador, sabiendo que ambos polinomios tienen el factor $x-1$.
Para el denominador el resultado es fácil: $x^2-1=(x-1)(x+1)$.
Para el numerador, efectuamos la división

$$\begin{array}{r|l} & 3x+7 \\ \hline x-1 & 3x^2+4x-7 \\ & \underline{-3x^2+3x} \\ & \qquad 7x-7 \\ & \qquad \underline{-7x+7} \\ & \qquad\qquad 0\,. \end{array}$$

O sea que la factorización del numerador es $3x^2+4x-7=(x-1)(3x+7)$.
Con estos resultados obtenemos:

$$\frac{3x^2+4x-7}{x^2-1} = \frac{(x-1)(3x+7)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x+7}{x+1}\,.$$

Ahora sí podemos calcular el límite usando esta última expresión equivalente a la primera, para $x \neq 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+4x-7}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x+7}{x+1} = \frac{3(1)+7}{1+1} = \frac{10}{2} = 5.$$

(3) Si $f(w) = \dfrac{\sqrt{w+1}+3}{(w^2+1)^3}$, calcular $f'(1)$.

▼ Derivamos

$$f'(w) = \frac{(w^2+1)^3\left(\dfrac{1}{2\sqrt{w+1}}+0\right) - \left(\sqrt{w+1}+3\right)3(w^2+1)^2 2w}{\left[(w^2+1)^3\right]^2} =$$

$$= \frac{(w^2+1)^2\left[(w^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{w+1}} - (\sqrt{w+1}+3)6w\right]}{(w^2+1)^6} =$$

$$= \frac{\dfrac{w^2+1}{2\sqrt{w+1}} - 6w(\sqrt{w+1}+3)}{(w^2+1)^4}$$

y entonces

$$f'(1) = \frac{\dfrac{1^2+1}{2\sqrt{1+1}} - 6(1)(\sqrt{1+1}+3)}{(1^2+1)^4} = \frac{\dfrac{2}{2\sqrt{2}} - 6(\sqrt{2}+3)}{2^4} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2} - 18}{16} \approx \frac{0.7071 - 8.4853 - 18}{16} \approx -1.6111\,.$$

□

(4) Sea la función

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ c & \text{si } x \in [-1, 1] \\ x + 2 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Encontrar los valores a, c que hacen que la función $g(x)$ sea continua en todos los reales.
Dar un bosquejo de la gráfica de $g(x)$ con los valores encontrados.

▼ Las fronteras de los "pedazos" que definen la función son $x = -1$ & $x = 1$. Se ve claramente que en los tres "pedazos" la función es continua. Para la continuidad en todos los reales se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^+} g(x) = g(-1) \;\&\; \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1).$$

Esto se traduce en

$$\begin{aligned} a + 1 &= c \\ c &= 1 + 2 \text{ respectivamente;} \end{aligned}$$

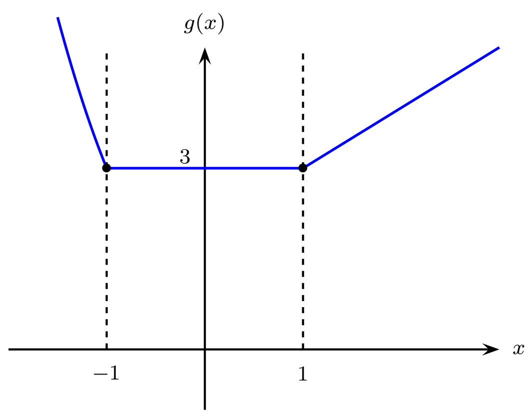
resolviendo

$$\begin{aligned} c &= 3; \\ a &= 2\ , \end{aligned}$$

la función es

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ x + 2 & \text{si } x > 1\,; \end{cases}$$

la gráfica de la función $g(x)$



□

(5) Sea $y = f(x)$ definida implícitamente por:

$$x^4 + 3x^2y + y^3 = 5\,.$$

Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto $(-1, 1)$.

▼ Derivando

$$4x^3 + 3(2xy + x^2y') + 3y^2y' = 0 \Rightarrow 4x^3 + 6xy + 3x^2y' + 3y^2y' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2)y' = -4x^3 - 6xy \Rightarrow y' = -\frac{4x^3 + 6xy}{3(x^2 + y^2)}$$

y evaluando en el punto $(-1, 1)$

$$y'(-1,1) = -\frac{4(-1)^3 + 6(-1)(1)}{3\left[(-1)^2 + (1)^2\right]} = -\frac{-4-6}{3(2)} = -\frac{-10}{6} = \frac{5}{3}\,,$$

calculamos la ecuación de la recta tangente

$$\frac{y-1}{x-(-1)} = \frac{5}{3} \Rightarrow y - 1 = \frac{5}{3}(x+1) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}\,.$$

□

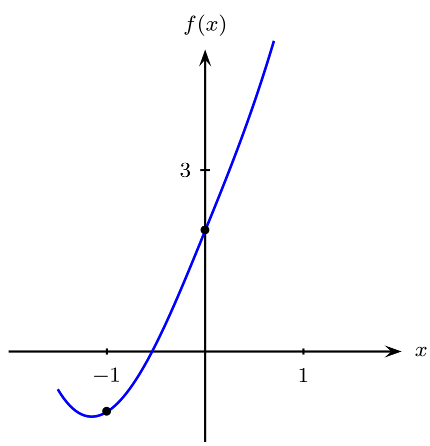
(6) Dada la función $f(x) = -x^3 + 4x + 2\,,$

obtener un intervalo en donde la función tenga al menos una raíz. Justifique su respuesta.

▼ Evaluamos $f(x)$ en algunos números

x	$f(x) = -x^3 + 4x + 2$
-1	-1
0	2

con lo que comprobamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en el intervalo $[-1, 0]$. Usando el teorema de Valor Intermedio se garantiza que existe una raíz de $f(x)$ en ese intervalo.
Veamos la gráfica de la función $f(x)$:

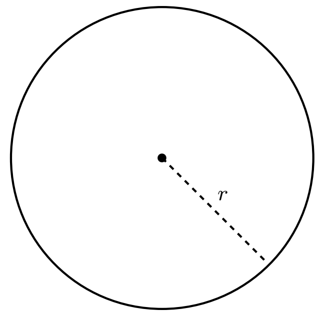


El resultado garantiza la existencia de la raíz: no la calcula. Se garantiza el corte de la gráfica con el eje x. No se sabe dónde.

□

(7) Se infla un globo esférico introduciendo aire a razón de 50 cm^3/s. Calcular la rapidez de cambio del radio del globo cuando su diámetro es de 26 centímetros.

▼ Dibujamos la correspondiente la figura



Se sabe que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Considerando que el volumen y el radio cambian con el tiempo, tenemos entonces:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t).$$

Derivando con respecto a t:

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi 3r^2(t)r'(t) = 4\pi r^2(t)r'(t)\,.$$

O sea:

$$r'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi r^2(t)}\,.$$

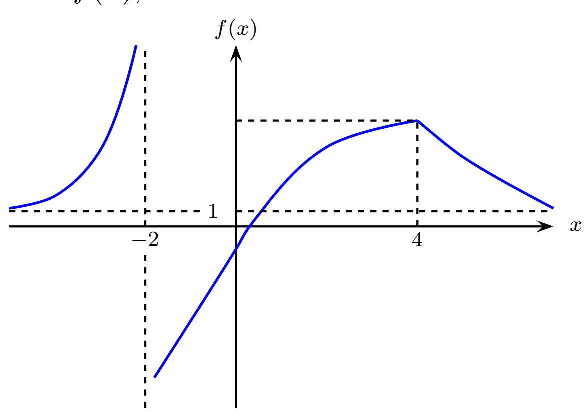
Según los datos proporcionados $V'(t) = 50$ cm^3/s, en todo momento; entonces existe un momento, digamos t_0 cuando el diámetro $2r(t_0) = 26 \Rightarrow r(t_0) = 13$.

Para ese momento t_0 calculamos la variación del radio:

$$r'(t_0) = \frac{V'(t_0)}{4\pi r^2(t_0)} = \frac{50}{4\pi(13)^2} \approx 0.0235 \text{ cm/segundo}.$$

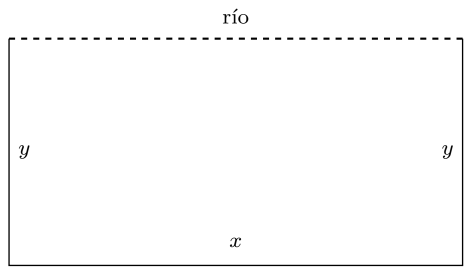
(8) Dar un bosquejo de la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:
- $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2) \bigcup (-2, 4)$;
- $f'(x) < 0$ para $x \in (4, +\infty)$;
- $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -2$;
- $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

▼ Bosquejo la gráfica de la función $f(x)$, con las condiciones dadas:



(9) Un terreno rectangular está delimitado por un río en un lado y por una cerca eléctrica de un solo cable en los otros tres lados.
¿Cuáles son las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima?
¿Cuál es la mayor área que pueda cercarse con un cable de 800 m?

▼ Veamos la figura siguiente



El área del terreno:

$$A = xy.$$

El perímetro del terreno:

$$P = x + 2y = 800 \text{ m, según los datos proporcionados.}$$

De aquí obtenemos:

$$x = 800 - 2y.$$

Sustituyendo en la fórmula del área:

$$A(y) = (800 - 2y)y = 800y - 2y^2.$$

$A(y)$ es la función cuyo máximo deseamos calcular.

$$A'(y) = 800 - 4y\,;$$
$$A''(y) = -4 < 0.$$

La segunda derivada es negativa, el punto crítico será un máximo

$$A'(y) = 0 \Rightarrow 800 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{800}{4} = 200.$$

Para calcular la longitud del otro lado de terreno (la x), sustituimos:

$$x = 800 - 2(200) = 400 = 2y.$$

Por lo tanto, las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima son $x = 400$ & $y = 200$.
La mayor área que se puede cercar con estas condiciones es de $A = 80\,000$ m^2.

□

(10) Sea la función $f(x) = 3x^4 + 8x^3$.

(a) Proporcionar el dominio y las raíces de la función

▼ Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Las raíces de $f(x) = x^3(3x+8)$ son $x = 0$ y $x = -\dfrac{8}{3}$.

(b) Proporcionar los intervalos de monotonía

▼ Derivamos

$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 = 12(x^3 + 2x^2) = 12x^2(x+2).$$

El único factor de la derivada que nos proporciona cambio de signo es $x+2$. Por ello el único valor extremo se encuentra en $x = -2$. Se ve de inmediato que:
$f(x)$ es decreciente en $x \in (-\infty, -2)$;
$f(x)$ es creciente en $x \in (-2, +\infty)$.

(c) Proporcionar los intervalos de concavidad

▼ Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 12(3x^2 + 4x) = 12x(3x+4) = 36x\left(x + \frac{4}{3}\right).$$

Para el signo de la segunda derivada usamos la tabla

	Signo de		
Intervalo	$x + \frac{4}{3}$	x	$x(x + \frac{4}{3})$
$x < -\frac{4}{3}\,(< 0)$	$-$	$-$	$+$
$-\frac{4}{3} < x < 0$	$+$	$-$	$-$
$x > 0\,(> -\frac{4}{3})$	$+$	$+$	$+$

De esto concluimos que
$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \bigcup (0, +\infty)$;
$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

(d) Proporcionar los máximos y mínimos absolutos y relativos

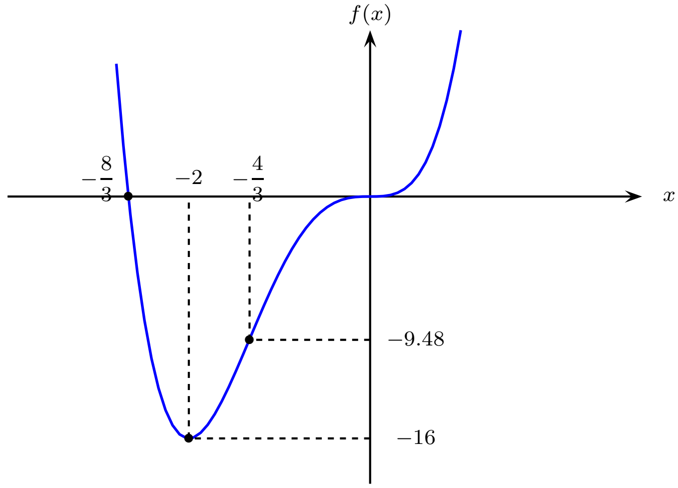
▼ $f(x)$ no tiene máximo absoluto.
$x = -2$ es el único mínimo local y absoluto.

(e) Dar un bosquejo de la gráfica

▼ Evaluamos la función $h(x)$ en algunos puntos:

x	$f(x) = 3x^4 + 8x^3$
-2	-16
$-4/3$	-9.48

y dibujamos la gráfica de la función $f(x)$:



$f(x)$
x
$-\frac{8}{3}$
-2
$-\frac{4}{3}$
-9.48
-16